
WIDENER LIBRARY
HX 1ZQ2



SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: N: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
ROBERT TROUP PAINE
TO
HARVARD



SUITE DES

MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

Tirés des Regiſtres

DE L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

DE L'ANNE'E M. DCCVI. Tom. II



A AMSTERDAM,

Chez PIERRE MORTIER,

M. DCCXLVI.

Avec Privilege de N. S. les Etats de Hollande & de West-Friſe.

* OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire Royal.

* Pag. 155. in 4

Par M^rs. CASSINI ET MARALDI.

† LE Ciel qui a été couvert une partie de la nuit du 27 au 28 Avril, ne nous a pas permis d'observer le commencement de l'Eclipse, qui suivant le calcul devoit arriver 30 minutes après minuit, la Lune ne s'étant pas pu voir qu'à 1^h $30'$ au travers des nuages qui empêchoient de voir sa partie éclipsée.

On l'a commencé de voir un peu plus distinctement à 1^h $35'$; mais les nuages qui passoient devant la Lune empêchoient de voir le terme de l'ombre bien distinct pour pouvoir mesurer la grandeur de l'Eclipse avec précision.

Nous avons observé en deux maniéres différentes cette Eclipse, l'une par le Micrometre posé au foier de la Lunette de 8 pieds, l'autre par la Lunette posée sur la machine parallatique, en observant le passage des bords de la Lune & des cornes par les fils qui se croisent au foyer de la Lunette.

Les nuages qui passoient souvent devant la Lune, & l'ont aussi entierement couverte plusieurs fois différentes, ont empêché de marquer exactement les phases de l'Eclipse, & l'entrée & sortie des taches de l'ombre.

I 2 à 1h

† 5. Mai 1706.

à 1h 34½	L'ombre éloignée de Grimaldi de la longueur de cette tache.			
1 38	En mesurant avec le Micrometre la partie claire de la Lune, nous trouvâmes sa partie éclipsée d'environ 6 doits; mais cette observation nous paroît un peu douteuse.			
1 45	La grandeur de l'Eclipse étoit de	5 doits	52′	
1 47		5	48	
* 1 53½	La grandeur de l'Eclipse étoit de	5	45	* Pag. 156. in 4.
1 55	L'ombre à Promontorium acutum.			
1 55	L'Eclipse est de	5	40	
1 57	L'ombre étoit fort proche de Dionysius.			
2 0	L'Eclipse est de	5	33	
2 2½	L'ombre étoit à peu prés dans la même situation à l'égard de Dionysius.			
2 4	La Lune éclipsée de	5	26	
2 7	La Lune se couvre			
2 11	L'ombre quitte Mare humorum			
2 15	La Lune s'étant éclaircie l'Eclipse est de	5 envir.		
2 20	La grandeur de l'Eclipse.	4	51	
2 24	L'Eclipse est de	4	45	
2 29	L'Eclipse est de	3	20	
2 31	La Lune se couvre, & reste presque toujours couverte jusqu'à 2h 59′ que l'Eclipse n'étoit plus que de 3 doits 34′.			
3 2½	Fin de l'Eclipse.			

S 1

Par

Par la Machine parallatique.

à 1h 42' ½	Grandeur de l'Eclipse.	4 doits 58'
1 48 ¾		5 12
1 58 13		5 10
2 4 40		5 7
2 24 30		3 49
3 3	Fin de l'Eclipse.	

* OBSERVATION * Pag. 157 in 4.

De l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire.

Par M. DE LA HIRE.

† LE Ciel fût tout couvert, & il plut dans tout le commencement de cette Eclipse; mais vers le milieu la Lune commença à paroître entre les nuages. Nous n'en pumes faire que les observations suivantes avec le Micrometre appliqué à la Lunette de 7 piés.

à 1h 43 24"	La Lune étoit éclipsée de	5 doits 40 m.
46 16		5 40
2 0 44		5 27
8 12		5 19
20 38		4 34
41 46		3 15

3 4 28 Fin de l'Eclipse, mais un peu douteuse, à cause qu'on ne peut pas bien juger de l'ombre véritable qui ne paroît plus sur le disque de la Lune.

† 5 Mai 1706.

L'ombre passa un peu au-delà du *Promontorium acutum*, & il nous sembla qu'il fût tout caché à 1h 51′ 30″; mais il étoit fort difficile d'en bien juger, à cause que l'ombre paroissoit aller fort lentement en cet endroit.

Nous ne pumes pas observer les Emersions des Taches ni même de Tycho, les nuages qui passoient continuellement sur le corps de la Lune ne le permettant pas.

L'ombre étoit fort noire, & lorsque le Ciel étoit le plus serein, on voyoit assez difficilement le bord du disque qui étoit obscurci. Elle étoit d'ailleurs assez nette & tranchée.

Nous observames aussi le diamétre de la Lune de 29′ 37″ à la hauteur de 15° 40′.

Nous avions fait le jour précédent quelques observations * de la Lune, comme son passage par le meridien; pour le comparer à celui qui précédoit l'Eclipse; mais on ne put pas à cause du mauvais tems.

* Pag. 158. n. 4.

Il faut remarquer que dans les Eclipses de Lune, lorsque l'ombre est fort noire, ce qui arrive assez rarement, il est difficile de déterminer l'Emersion des Taches, qu'on ne peut pas voir avant qu'elles soient sorties; car on ne distingue pas facilement les Taches dans l'ombre.

OB-

OBSERVATIONS
SUR LE FER AU VERRE ARDENT.

Par M. HOMBERG.

† LE Fer forgé étant exposé au verre ardent en petits morceaux, comme sont les pointes de clous de Maréchal ou des broquettes de Tapissier, s'y fond assez vite, mais d'une maniere différente des autres métaux. Tous les métaux quand ils commencent à fondre, c'est toute la masse ensemble qui se liquefie peu à peu, comme l'on voit le plomb se fondre ou l'étain au feu ordinaire: mais le fer se fond au Soleil tout autrement.

D'abord il paroît sur la superficie du fer une matiere fondue comme de la poix noire, qui se distingue fort bien d'avec une autre substance du fer qui est blanche & plus difficile à fondre, sur laquelle cette matiere noire coule & change de place comme la cire fondue couleroit sur un métal chaud. Le fer se tient quelquefois un bon *miserere* dans cette situation avant que la matiere blanche commence à se fondre, laquelle paroît inégale & raboteuse sous cette matiere noire, jusqu'à ce que toute la masse du fer soit fondue: alors si le fer est soûtenu d'un charbon, la matiere noire se joint au charbon, s'enflamme, * se creuse fort vite & saute en étin- *Pag. 13 in 4.

† 8. Mai 1706.

étincelles, qui petillent comme le fer qui brule dans la forge d'un Maréchal.

Les étincelles en sortent d'abord fort grosses & en grande quantité; elles diminuent ensuite jusqu'à ce qu'à la fin il reste une masse de fer fondu qui ne jette plus d'étincelles, & qui se tient en fonte aussi tranquillement qu'une goute d'huile se tient sur une assiette d'argent.

Pendant que le fer est dans cette fonte tranquile où il ne jette plus d'étincelles, il s'amasse sur la superficie un verre transparent, mais qui ne s'y tient pas de la même maniére qu'il fait sur les autres métaux qui se vitrifient, où le verre nage sur le métal sans le boursouffler, comme une goute de graisse nageroit sur l'eau chaude: mais le verre du fer se boursouffle & s'éleve en écume blanche, qui de tems en tems se rabat en une goute unie & transparente, & qui un moment après se releve en écume; ce qui arrive successivement & souvent. Mais le fer étant refroidi, le verre n'est ni blanc ni transparent comme il paroissoit étant liquide, mais fort noir comme seroit un émail noir.

Pendant le tems que le fer petille & que les étincelles en sautent, il s'attache sur toute la superficie du charbon qui soûtient le fer, une très grande quantité de petites boulettes, qui ne sont autre chose que la partie inflammable du fer qui s'en sépare en forme d'étincelles, & qui tombe sur le charbon. Si l'on remue un peu le charbon pendant la fonte tranquile du fer, en sorte que ces petites boulettes des étincelles puissent retomber sur ce fer fondu; alors ce fer recommence à jetter des étincelles jusqu'à ce que la matiere étincelante en soit entierement resortie.

Il y a beaucoup d'apparence que la matiere qui fournit ces étincelles, ou la matiere inflammable du fer, est cette matiere noire qui se fond d'abord que le fer paroît au foyer du verre ardent ; puisque le fer ne commence à jetter des étincelles, que lorsque cette matiere noire commence à toucher le charbon, & que la partie du fer qui * se tient en une fonte tranquile sans etinceler, est cette matiere blanche du fer qui fond la derniere, que la premiere est une matiere non encore métallique, & que la derniere est le vrai fer ou la partie métallique du fer.

* Pag. 160. in 4.

Le hazard nous a découvert que dans toutes les cendres il se trouve une poudre noiratre qui est un vrai fer : ce que l'on peut vérifier de cette maniére. Brulez en cendres quelle sorte d'herbes seches ou du bois que vous voudrez : prenez les précautions nécessaires pour qu'il ne s'y puisse meler quelque matiere ferrugineuse : puis fouillez dans ces cendres avec une lame de coûteau bien nette & qui soit aimantée d'un Aimant vigoureux ; vous trouverez au bout de vôtre coûteau une barbe d'une poudre noiratre comme si vous l'aviez trempé dans de la limaille de fer. Ramassez cette poudre : faites cela tant de fois que vous en ayez assez pour la pouvoir fondre ; ce que vous ferez aisément au verre ardent : il vous en viendra une grenaille de fer, qui jettera des étincelles sur le charbon comme fait un morceau de fer qu'on rougit fortement à la forge.

Cette expérience nous marque avec beaucoup d'évidence que dans le brulement ou dans l'incineration de toute matiere vegetale, il se compose du fer, puisqu'il s'attache au bout du coûteau aimanté en forme d'une poudre noiratre ;

ce qui n'arrive à aucune autre matiere qu'au fer ou à l'acier, qui est du fer purifié. Et comme dans le brulement de quelque matiere vegetale que ce soit, les cendres qui en proviennent consistent en une partie de sel fixe de la plante, en un peu d'huile fetide & en un peu de terre; il pourroit fort bien être que la substance du fer consiste de même en une partie de terre & de sel fixe de la plante, dont les parties sont si fortement collées ensemble & envelopées dans le feu par l'huile fetide du vegetal brulé, que la flamme a de la peine à les separer les unes des autres, & qu'elles s'y fondent plutôt ensemble pour produire un corps dur & cependant malleable que nous appellons du fer.

*Pag. 161. in 4. * Nous avons observé que la matiere noire du fer est une matiere huileuse, qui s'enflamme avec le charbon ou semblable & non autrement. Il pourroit bien être que cette matiere huileuse ou noire du fer soit un reste superflu de l'huile du bois ou d'autre vegetal, qui par son incineration a produit le fer, & qui ne s'est pas joint assez intimement ou en trop grande quantité avec les autres principes qui entrent dans la composition du fer, & qui se rejoint dans l'occasion aux parties huileuses ou inflammables du charbon comme à son semblable, & y produit cette inflammation ou étincellement comme la matiere huileuse vegetale ou animale en se joignant à quelque sel lui donne le caractere du salpetre, & qui s'en détache en s'enflammant à chaque fois qu'elle touche à un charbon ardent.

L'étincellement du fer n'arrive ordinairement que lorsqu'on le fond sur un charbon : car si on le fond sur quelqu'autre métal, dans un

creu

creuset ou sur de la porcelaine; le fer n'étincelle point, & alors la matiere blanche du fer se sépare de la noire dans la fonte, & fait un culot à part, sur lequel nage la matiere noire, comme les scories surnagent un métal fondu. La matiere blanche est dure comme l'acier trempé; & étant cassée, elle est jaunâtre en dedans, & quelquefois blanche comme de l'argent. La matiere noire, étant réduite en scories, est tendre & friable comme du verre outré au Soleil.

Le fer joint aux autres métaux par la fonte produit des effets différens selon les métaux ausquels on le joint, & selon le tems qu'on le joint à ces métaux. Quand on fond le fer avec quelque métal sulphureux, comme avec l'or, avec le cuivre ou avec l'étain; la matiere blanche du fer se mêle avec ces métaux, & la matiere huileuse ou noire les surnage comme une scorie qui s'en sépare fort aisément par un coup de marteau, comme toutes les scories se separent de dessus les métaux sur qui elles tiennent.

Quand on fait fondre le fer le premier sur un charbon, & qu'ensuite on met l'autre métal sur ce fer fondu; alors * le fer continue à jetter des étincelles jusqu'à sauter presqu'entierement de dessus le charbon en petits grains, qui sont d'abord comme de la poussiere, ensuite comme du sable, & à la fin comme des têtes d'épingles; & il emporte avec lui presque toute la masse de l'autre métal. Mais quand on fait fondre l'autre métal le premier & qu'on met le fer dessus ce métal fondu; alors très-souvent il ne se fond que seulement la matiere noire du fer, sans qu'on puisse faire fondre la matiere blan-

* Pag. 162. in 4.

 che,

che, laquelle nage ſur l'autre métal, ou s'y enfonce ſelon que le fer eſt plus ou moins peſant que l'autre métal, & la matiere noire du fer leur ſert de ſcories. Dans cette ſituation le fer ne petille & n'étincelle jamais, même avec les métaux ſulphureux, comme nous allons voir dans le détail ſuivant.

Quand on fait fondre du fer juſqu'à ce qu'il ait ceſſé de jetter des étincelles, & juſqu'à ce qu'il ſe tienne en une fonte tranquile; ſi pour lors on met un morceau d'argent deſſus, l'argent ſe fond & les deux métaux ſe confondent en une maſſe, ſans que le fer recommence à jetter des étincelles, mais ſi l'on fait fondre l'argent le premier, & ſi l'on met un morceau de fer ſur cet argent fondu, l'argent ſe tiendra en fonte, & le fer ne ſe fondra pas. Il arrivera pour lors un effet qui m'a paru particulier à l'argent, qui eſt que la partie huileuſe du fer ſe fondra d'abord ſeule; elle coulera de deſſus le fer, & entrera dans la maſſe de l'argent fondu, comme l'eau entre dans une éponge, laiſſant la partie du fer la plus blanche & la plus métallique deſtituée de ſon ſoufre brulant qui lui ſert ordinairement de fondant: & c'eſt là la raiſon pourquoi le fer pour lors ne ſe fond que très-difficilement. L'argent qui a bu ce ſoufre devient noiratre & fort caſſant; il le faut mettre à la coupelle de plomb pour l'en ſéparer.

Voilà l'effet du mélange du fer avec l'argent, qui eſt le métal le moins ſulphureux que nous aions. Il n'arrive pas la même choſe quand on mêle le fer avec un métal ſulphureux, comme eſt l'or, le cuivre & l'étain; ſoit qu'on les faſſe fondre devant le fer, ou qu'on faſſe fondre

le fer * le premier : parce que ces métaux aiant d'eux-mêmes beaucoup de souffre, ils ne boivent pas le souffre brulant du fer comme faisoit l'argent qui a fort peu de souffre. *Pag. 16. in 4.

Le fer fondu avec l'un de ces trois métaux produit encore des effets différens. Etant mêlé avec l'or, il continue à petiller comme si on l'avoit fondu seul, sans jetter une plus grande quantité d'étincelles: ce qui marque que le souffre de l'or n'est pas un souffre brulant comme celui du fer; car il en auroit augmenté les étincelles.

Quand on fond un morceau de fer jusqu'à la cessation du petillement; si l'on met pour lors une plaque de cuivre rouge dessus, il arrive premiérement que le cuivre devient blanc comme de l'argent, après quoi il devient noir & lustré comme du vernis noir de la *Chine*, troisiémement il se ride comme une pomme fort ridée restant toujours noir, & un moment après il se fond & se confond avec le fer: mais comme le fer est plus leger que le cuivre, il monte sur la superficie du cuivre comme une scorie blanchatre, & s'étant joint au souffre du cuivre, il recommence à jetter des étincelles en plus grande quantité qu'auparavant, & beaucoup plus larges & plus brillantes que lorsqu'il petilloit seul & sans le cuivre; ce qu'il ne faisoit pas avec l'or: marque évidente que le cuivre contient un souffre brulant aussi bien que le fer, & que l'or n'en contient pas. Ces étincelles brillantes durent long-tems: à la fin elles cessent, & la masse fondue continue à jetter une très-grande quantité de petits grains de métal sans étincelles. Ces petits grains sont d'abord fort menus, & ne s'élévent pas plus de quatre ou cinq pouces; mais à la fin ils deviennent aussi

gros que des têtes des plus grosses épingles, & ils s'élancent en l'air de la hauteur d'un pied ou d'un pied & demi. Quand on met quelque bassin audessous du charbon qui tient cette masse petillante; on reçoit ces petits grains qui sautent en l'air, que l'on reconnoit fort bien & sans loupe, les uns de cuivre pur, les autres de fer fondu, & d'autres de fer mêlé de cuivre.

L'étain aiant été mis en fonte au Soleil; si l'on y ajoûte * du fer, le fer se fond promptement & se mêle parfaitement avec l'étain, & mieux qu'aucun autre métal. Ils se tiennent tranquillement en fonte, sans que le fer petille ou jette des étincelles: ce qui marque que le soufre de l'étain approche de celui de l'or, & qu'il n'est pas brûlant comme celui du fer ou du cuivre. Ils fument un peu ensemble, & se vitrefient en un émail noir. Le métal qui se trouve sous l'émail, est blanc comme de l'argent de coupelle, & dur & cassant comme du fer fondu.

* Pag. 164. in 4.

Si à cet étain & fer fondu ensemble on ajoûte du plomb de chacun parties égales, la matiere se fondra difficilement; & en la laissant refroidir, la masse fondue produit sur le champ une espece de vegetation, & jette sur toute sa superficie une poudre jaune de l'épaisseur d'un doigt; en sorte que la poudre qui sort de la masse fondue, paroît le double de celle qui l'a produite, & la masse fondue qui étoit fort bossue devient plate & même creuse. Cette poudre sort d'abord en forme de champignons sur la superficie de la masse fondue, qui tombent ensuite en une poudre jaune. Si l'on ajoûte un peu de cuivre à ce mélange de fer, d'étain & de plomb, il ne

ne produit plus de champignons ni de poudre.

L'étain étant fondu le premier, & les clous de fer mis sur cet étain fondu pour se fondre ensuite; il ne se fait point de petillement ni d'étincelles, très-peu de fumée, & la fonte est tranquille, comme nous venons de le voir. Mais si l'on fond le fer le premiér, & si l'on met l'étain sur ce fer fondu; l'étain se calcine dans un moment en une chaux blanche, & aussi-tôt après il se fond & se confond avec le fer: il en sort une prodigieuse quantité de fumée: le fer & l'étain petillent ensemble sans jetter d'étincelles, & chaque grain qui en saute en très-grand nombre, entraine avec lui un filet de fumée blanche, laquelle se durcit en l'air & tient ensemble comme de la toile d'araignée, & remplit l'air de flocons & de fils blanchâtres qui couvrent tout ce qui se trouve alentour. Chaque grain de ce métal qui s'élance en l'air, & qui forme un * fil blanc depuis la masse du métal d'où il sort jusqu'à la hauteur où il peut aller, monte jusqu'à douze, quinze & dix-huit pouces; ce qui fait un mouvement fort agréable aux yeux, qui ressemble à une grande quantité de fusées volantes & de serpentaux qu'on lâcheroit en même tems.

* Pag. 16 in 4.

L'étain fin mis seul au verre ardent fume beaucoup, & s'en va enfin entierement en fumée, ne laissant aucun residu. L'étain de vaisselle fume plus que l'étain fin, s'en va plus vite en fumée, & laisse à la fin une matiere terreuse qui ne change plus. L'étain & le plomb, parties égales, fument beaucoup, & se vitrifient à la fin. Ce verre fume encore quelque tems, puis il cesse de fumer, & se change à la fin en une matiere terreuse.

OBSERVATION

DE

L'ECLIPSE DU SOLEIL

Faite à Marli le 12 Mai 1706. en présence du ROI, *de* MONSEIGNEUR, *&* *de* MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.

† MONSIEUR l'Abbé *Bignon* aiant communiqué à l'Académie une Lettre qu'il avoit reçûe de M. le Comte de *Pontchartrain*, par laquelle il lui mandoit que le Roi vouloit qu'on choisît quelques Astronomes de l'Académie Royale des Sciences pour aller observer à *Marli* en sa présence l'Eclipse du Soleil, pendant que les autres resteroient à l'Observatoire pour y faire les observations de cette Eclipse. Mrs *Cassini* le fils & *de la Hire* le fils furent choisis pour aller à *Marli*, & ils porterent avec eux un Quart de cercle de deux pieds de rayon, une Pendule * à seconde, une à demi-seconde, & plusieurs Lunettes de diverses grandeurs.

* Pag. 166. in 4.

On avoit attaché à deux de ces Lunettes, dont l'une étoit de neuf & l'autre de sept pieds, deux supports qui portoient une planchette perpendiculaire à l'axe de la Lunette, à la distance de l'oculaire d'environ deux pieds, & l'on avoit tracé sur un carton posé sur cette planchette un cercle égal à l'image que le Soleil passant par la Lunette formoit sur ce carton. Ce cercle étoit di-

† 15. Mai 1706.

divisé par des cercles concentriques en doits & demi doits.

On avoit placé au foyer commun des deux verres d'une autre Lunette de cinq pieds, un chassis avec des fils de soie simple paralléles entr'eux, dont les deux extrêmes comprenoient exactement l'image du Soleil. Les autres fils divisoient cet espace en douze parties égales.

Ils arriverent à *Marli* le 11 Mai après midi, où M. le Comte de *Pontchartrain* les aiant presenté au Roi, Sa Majesté leur ordonna de choisir un lieu propre pour faire exactement l'observation de cette Eclipse.

Monseigneur le Duc de *Bourgogne* jugea à propos de mettre les Instrumens dans le Salon de *Marli* qui regarde la Cascade que l'on appelle ordinairement la Riviére, lequel est exposé au Midi avec un peu de déclinaison vers l'Orient. On y plaça le soir la Pendule à seconde, & l'on observa en sa présence & de toute la Cour des hauteurs du cœur du Lion avec le Quart de cercle pour regler la Pendule.

Le lendemain matin 12 Mai l'on observa dans le Salon du Château où étoient les Instrumens quelques hauteurs du Soleil pour sçavoir l'état de la Pendule; & aiant placé les trois Lunettes dont on a parlé ci-dessus sur le terrasse qui est près de ce Salon, on attendit le moment de l'Eclipse.

Monseigneur le Duc de *Bourgogne* fût le premier qui l'apperçut entre les nuages à 8^h 28' 57", lorsqu'elle étoit éclipsée d'environ un demi doit, & jugea qu'il y avoit au moins deux minutes qu'elle avoit commencé; de sorte * que l'on peut déterminer son commencement à 8^h 26'. Le Soleil étant encore entre des nuages rares, l'on dé-

détermina les premieres Phases avec les reticules qui étoient placez au foyer de la Lunette de cinq pieds que l'on avoit attachée sur le Quart de cercle ; & lorsque le Soleil fût entierement dégagé des nuages, on l'observa par le moien de son image qui se peignoit sur le carton exposé aux Lunettes.

Monseigneur le Duc de *Bourgogne* détermina lui-même la plûpart des Phases lorsque l'Eclipse arrivoit à differens doits, & l'on marquoit au même instant à la Pendule le tems de l'observation. Il détermina aussi en même tems la grandeur de l'Eclipse & la distance des cornes pour trouver la proportion du diamétre apparent du Soleil à celui de la Lune, & il trouva le diamétre apparent de la Lune plus grand que celui du Soleil, de même qu'il est marqué dans les Tables.

Le Roi vint voir l'Eclipse lorsqu'elle augmentoit encore, & faisoit marquer à la Pendule l'heure des Phases différentes & le tems de la plus grande Eclipse. Sa Majesté y demeura encore long-tems après qu'elle eut commencé à diminuer. Monseigneur, Madame la Duchesse de *Bourgogne*, Monseigneur le Duc de *Berri*, Madame, Monsieur le Duc d'*Orleans*, Monsieur le Duc & Monsieur le Prince de Conti & toute la Cour assisterent à l'observation, & eurent le plaisir de déterminer eux mêmes le tems des Phases.

L'après-midi on observa des hauteurs correspondantes à celles du matin, & Monseigneur le Duc de *Bourgogne* se fit expliquer la méthode dont l'on se sert pour déterminer les Eclipses par la projection de la terre dans l'orbe de la Lune.

Ob-

** Observation de l'Eclipse du Soleil à* Marli. * Pag. 168. in 4.

Le 12 Mai à 8h 28' 57" du matin Monseigneur le Duc de *Bourgogne* observa que le Soleil étoit deja éclipsé d'environ un demi doit, & qu'il y avoit au moins deux minutes que l'Eclipse avoit commencé.

8h	38'	25"	Deux doits & demi.
8	40	28	Trois doits.
8	51	58	Cinq doits.
8	56	45	Six doits.
9	3	31	Sept doits.
9	13	2	Huit doits & demi.
9	15	33	Neuf doits.
9	22	27	Dix doits.
9	33	7	Près de onze doits.
9	38	36	Dix doits & demi.
9	41	36	Dix doits.
9	48	7	Neuf doits.
9	53	38	Huit doits.
9	56	18	Sept doits & demi.
10	6	11	Six doits.
10	12	23	Cinq doits.
10	18	11	Quatre doits.
10	27	42	Deux doits & demi.
10	36	48	Un doit.
10	41	45	Fin de l'Eclipse.

OB-

* Pag. 169. in 4.

* OBSERVATION

De l'Eclipse du Soleil faite le 12 Mai 1706 dans l'Appartement inferieur de l'Observatoire.

PAR M^rs. CASSINI ET MARALDI.

† ON a observé en deux maniéres différentes l'Eclipse de Soleil qui est arrivée le 12 de ce mois au matin. On avoit mis au foier de la Lunette de 34 pieds, placée sur la terrasse de l'Observatoire, un papier bien tendu sur lequel se peignoit l'image du Soleil, dont le diamétre étoit presque de quatre pouces. On avoit divisé ce diamétre en 12 parties par six cercles concentriques qui représentoient les douze doits, dont chacun étoit un peu moins de quatre lignes.

Pour observer les doits de l'Eclipse par cette Lunette, on faisoit concourir l'image du Soleil avec le cercle exterieur, & dans cette situation on observoit quand la concavité de l'Eclipse arrivoit à une de ces circonférences qui détermi-noient les doits qui restoient éclairez, & à cet instant on marqua l'heure & la minute. M. *Coustard* & M. *Butterfield*, qui sont exercez dans ces sortes d'observations, eurent soin d'observer les doits de l'Eclipse avec cette Lunette.

On a aussi observé l'Eclipse dans la Tour orientale & dans la Salle, en présence de Monsieur le Nonce, de plusieurs Princesses, de plu-

† 15 Mai 1706.

plusieurs Messieurs de l'Académie, & d'un grand nombre d'autres personnes considérables.

Les Phases de l'Eclipse ont été observées par un Micrometre posé au foyer de la Lunette de 8 pieds, par le moyen duquel on a mesuré vers le commencement & vers la fin la distance des cornes. Dans la suite de l'Eclipse on a observé la partie claire du Soleil, d'où l'on a conclu les doits éclipsez & la plus grande obscurité.

Les nuages qui couvroient presque tout le Ciel le matin avant l'Eclipse, ne permettoient pas de voir le Soleil * que par intervalles. Nous le vimes à 8h 23' lorsque l'Eclipse n'avoit point commencé. Le Soleil se couvrit aussi-tôt; & s'étant découvert deux minutes après, nous vimes à 8 heures 25' 38" le bord occidental du Soleil qui manquoit déja, de sorte que l'Eclipse avoit commencé un peu auparavant. Le Soleil se couvrit de nouveau, & ne parut que vers les 8h 40' lorsque l'Eclipse paroissoit déja grande. Durant le reste de l'Eclipse le tems a été plus favorable, principalement vers le milieu & vers la fin.

* Pag. 17 in 4.

Observations faites par le Micrometre.		*Par la Lunette de 34 pieds.*	
8h 25' 38"	L'Eclipse avoit commencé.		
	L'Eclipse étoit de		
43	3 doits 48'		
49	4 30		
8 55 20	6 16		doits
9 1 30	7	9h 4' 0"	7
9 0	8 10	9 8 0	8
			12 20

Observations faites par le Micrometre.				*Par la Lunette de 34 pieds.*	
12′ 20″		8 doits	40′		
14	0	9	18		doits
19		9	23	9h 20′	10
9 23		10	48		
27		10	45		
9 28	55	10	48		
34	45	10	50	9h 32′ *Le tems de la plus grande obscurité.*	11

L'Eclipse a augmenté jusqu'à présent, dans la la suite elle va en diminuant.

9 40		10	14	9 42 0	10
9 58		7	21	9 54	8
10 0	0	6	56	10 0	7
10 0	0	4	45	10 7 30	6
13	30	4	37		
10 16		4	14	10 19 0	4
24		2	42	10 29	2
10 28	40	2	6	10 34	1
10 30	46	1	36	10 40 40 Fin de l'Eclipse par la Lunette de 34 pieds.	
10 34	10	1	9		
10 36	30	0	40		
10 40	47	Fin de l'Eclipse par la Lunette de 8 pieds.			

*Pag. 171. in 4. * Quoique la partie lumineuse du Soleil qui est restée dans la plus grande obscurité n'étoit qu'environ la douziéme partie de son diamétre, sa lumiere étoit encore assez grande : elle paroissoit seulement plus foible & plus rougeâtre.

Quelques minutes avant la fin de l'Eclipse, nous étions attentifs à observer avec la Lunette de 8 pieds le moment qu'elle finiroit. Nous remar-

remarquames que la commune section de l'obscurité & de la lumiere n'étoit pas une portion de cercle bien terminée, mais qu'elle étoit inégale, & qu'il y avoit des pointes obscures, une principalement plus considérable que les autres, qui restoient dans le Soleil plus que le reste de la circonférence. Ces pointes obscures sont des montagnes qui se rencontrent dans la circonférence de la Lune. On voit quelquefois avec les Lunettes de semblables pointes lumineuses sur la circonférence du disque de la Lune, lors même qu'elle est exposée directement au Soleil.

Cette Eclipse de Soleil est arrivée 14 jours 7h ¾ après l'Eclipse de Lune que nous observâmes le 27 d'Avril dernier. En raison de 29 jours 12 heures & trois quarts, qui est le tems moyen du retour de la Lune au Soleil, il devoit y avoir entre l'Eclipse de la Lune & celle du Soleil, 14 jours 18 heures & un peu plus d'un tiers. La différence entre l'intervalle moyen & le véritable est 10 heures & un tiers, dont l'intervalle véritable est plus court que le moyen. Cette différence vient en partie du mouvement de la Lune, qui a parcouru dans ce tems son demi cercle plus proche de la terre, où est son Perigée & son mouvement plus vite, & en partie de la parallaxe de la Lune, & elle est assez bien représentée par les hypotheses Astronomiques.

* Pag. 172. in 4.

* OBSERVATION

De l'Eclipse du Soleil du 12 Mai 1706 au matin à l'Observatoire Royal dans la Tour orientale à la hauteur de la grande Salle.

Par M. DE LA HIRE.

† J'AI observé cette Eclipse de la même maniére que j'ai accoûtumé de les observer. Le Micrometre dont je me sers pour prendre la plus grande largeur ou le diamétre de la partie du Soleil qui reste éclairée, est appliqué à sa Lunette ordinaire qui a 7 piés de foyer: Chaque intervalle des filets qui séparent la longueur de l'ouverture du Micrometre vaut 12′ 45″, comme je l'ai vérifié par des méthodes très-sûres, & dix tours de la grosse vis dont le pas est très-fin, & qui conduit le curseur qui est un filet parallele aux autres, remplissent exactement un intervalle des filets. Ce Micrometre est le même dont M. *Picard* se servoit, & qu'il avoit construit avec un très-grand soin, comme il est rapporté dans le Livre des Ouvrages de plusieurs Académiciens que j'ai fait imprimer en 1693 page 413 sur l'imprimé de M. *Auzout.*

Dans cette Eclipse j'ai observé le tems des Phases pour chaque demi-tour de la vis qui méne le curseur, ou pour chaque 20e. d'un intervalle des filets paralleles, ce qui vaut 38″ $\frac{1}{4}$ de degré, & ce qui me donnoit pour chaque observation près de la cinquiéme partie d'un doit; mais ces observations ont été faites sans avoir aucun

† 12 Mai 1706.

aucun égard aux doits, d'où il m'a été facile de les conclure & leurs minutes, par les parties proportionnelles entre le grand nombre des observations que j'ai faites.

Mais comme je sçai par expérience que lorsqu'on regarde avec le verre noir les filets hors du disque du Soleil, on ne peut qu'avec peine les appercevoir; ce qui *empêche de juger si l'un des filets rase exactement le disque apparent du Soleil, & c'est ce qui arrive ordinairement quand le Ciel est bien pur; je me suis servi du moyen que j'ai expliqué dans mes Tables Astronomiques pour prévenir cet inconvenient. J'ai tendu au-devant du verre objectif sur le bout du tuyau de la Lunette, une toile de soye blanche fort fine & assez claire, ce qui n'empêche pas de voir le Soleil très-distinctement, & ce qui donne en même tems une blancheur dans toute l'ouverture de la Lunette qui fait appercevoir facilement les filets hors du disque du Soleil, comme s'il y avoit un leger brouillard au devant du Soleil. Cette méthode est aussi très-commode pour les observations de la Lune dans le même cas.

*Pag. 173. in 4.

Le Ciel étoit fort brouillé avant le commencement de l'Eclipse; mais comme il y avoit de tems en tems quelques intervalles entre les nuages, j'étois attentif à observer le Soleil, lorsque je m'apperçûs qu'il y avoit une très-petite partie de son disque où la Lune commençoit à entrer, & je jugeai que l'Eclipse pouvoit avoir commencé 10″ ou 12″ plutôt. Il étoit alors 8h 25′ 52″, c'est pourquoi je marque le commencement à 8h 25′ 42″. Ensuite le Ciel se couvrit & ne laissoit voir le Soleil que par des intervalles trop petits pour pouvoir faire quelques

observations exactes, jusques vers les $8^h\frac{1}{2}$ où il commença à devenir serein, ou en partie jusqu'à la fin de l'Eclipse. Voici les observations que j'en ai faites. J'avois observé exactement le diamétre du Soleil de 31′45″, d'où j'ai réduit la partie restante éclairée du Soleil, à la partie éclipsée, comme je la donne ici, & au lieu des minutes & secondes de degré que j'ai observées, j'y ai substitué les doits & les minutes qui leur répondent.

Il faut remarquer qu'il y a toujours beaucoup de difficulté à observer les phases de ces Eclipses, à cause du mouvement continuel du Soleil, & qu'il faut en même tems être attentif aux deux filets qui renferment la partie éclairée & qui la traversent de biais, ce qui empêche * qu'on ne puisse déterminer la grandeur de l'Eclipse sans erreur de quelques secondes. Il n'en est pas de même de l'observation du diamétre; car on dispose le Micrometre de telle maniére que le disque du Soleil se meut entre deux filets paralleles.

* Pag. 174. in 4.

H.	′	″	*Doits.*	*M*	*Doits entiers.*			″
8	25	42	0	0	Commencement.			
	48	42	4	27	4½	à 8h	48′	57
	52	42	5	15	5	à 8	51	27
	55	42	5	44	6	à 8	57	7
	58	17	6	13				
9	0	52	6	42	7	à 9	2	5
	6	47	7	41				
	7	57	7	55	8	à 9	8	25
	9	22	8	10				
	10	42	8	25				
	12	7	8	39				
	13	32	8	53	9	à 9	14	4
							14	52

H.	'	"	Doits.	M.	Doits entiers..		h	'	"
	14	52	9	8					
	16	14	9	22					
	17	47	9	36					
	19	15	9	51	10	à	9h	20	21
	20	57	10	5					
	22	47	10	19					
	24	47	10	34					
	26	47	10	46					
	31	42	10	58	La plus grande obscurité.				
	34	57	10	46					
	36	57	10	34					
	39	8	10	19					
	40	42	10	5	10	à	9	42	17
	42	17	9	51					
	43	50	9	36					
	45	22	9	22					
	46	52	9	8					
	48	20	8	53	9	à	9	47	39
* 9	49	47	8	39					
	51	12	8	25					
	52	42	8	10					
	54	12	7	56	8	à	9	53	46
	55	37	7	41					
	57	4	7	27					
	58	32	7	12					
10	0	2	6	57	7	à	9	59	44
	1	32	6	42					
	3	2	6	28					
	4	27	6	13					
	5	57	5	59	6	à	10	5	52
	7	27	5	44					
	8	57	5	29					
	10	27	5	15					
	11	57	5	2	5	à	10	12	8
	13	22	4	47					

* Pag. 175. in 4.

H.	′	″	Doits.	M.	Doits entiers.			
	14	42	4	33				
	15	57	4	19				
	17	12	4	5	4	à 10h	17′	40″
	18	37	3	50				
	20	2	3	36				
	21	32	3	21				
	22	57	3	7	3	à 10	23	37
	25	47	2	37				
	27	7	2	22				
	28	37	2	7				
	29	52	1	53	2	à 10	29	14
	31	7	1	39				
	32	22	1	25				
	33	57	1	10				
	35	28	0	56	1	à 10	35	2
	36	57	0	41				
	38	22	0	27				
	41	6	0	0	Fin de l'Eclipse observée fort exactement.			

*Pag. 176. in 4. * A la fin de l'Eclipse il paroissoit au bord de la Lune deux petites ondes ou éminences.

On doit remarquer que dans le fort de cette Eclipse on ne laissoit pas de voir fort clair, quoiqu'il n'y eut que la douziéme partie du Soleil qui fût découverte ; mais il sembloit que le Ciel fût fort couvert de tous côtez à l'horizon, quoiqu'il fût fort serein.

Après avoir construit mes Tables Astronomiques sur toutes les observations que j'avois faites depuis un grand nombre d'années, & sur celles dont l'exactitude m'étoit connue, je n'ai donné pour exemple des Eclipses que celles qui devoient arriver depuis 1702, qui est l'année où elles ont été imprimées, afin d'éviter le reproche qu'on fait à quelques Astronomes, de ne

rapporter pour exemple que quelques unes de celles qui sont passées, ausquelles ils font convenir leurs hypotheses.

Cette Eclipse de Soleil est une de celles dont j'ai donné le calcul dans mes Tables, où j'avois trouvé qu'elle devoit commencer à 8h 27′ 11″, & finir à 10h 45′ 37″, & que sa quantité seroit de 10 doits 48′. Mais la *Connoissance des Tems* que M. *Lieutaud* de l'Académie calcule toujours sur mes Tables, comme on fait aussi nos Ephemerides, marque le commencement de cette Eclipse à 8h 27′ 4″, la fin à 10h 45′ 49″ & la quantité de 11 doits 8′. Je ne parle point du milieu de l'Eclipse, dont le tems ne peut pas être observé exactement.

La différence de quelques secondes qui se trouvent entre nos calculs, peut venir des parties proportionnelles où l'on peut faire quelque erreur, ce qui ne merite pas d'y avoir égard.

J'ai voulu faire cette observation avec un très-grand soin ; & pour ce sujet je me suis retiré tout seul dans la Tour orientale de l'Observatoire, afin de n'être point interrompu par une foule de curieux, qui ne nous permettent pas le plus souvent de donner toute l'attention nécessaire dans ces rencontres ; & j'ai trouvé que l'Eclipse avoit commencé à 8h 25′ 42″, qu'elle avoit fini à 10h* 41′ 6″, & que la quantité avoit été de 10 doits 58′, comme je l'ai rapporté ci-devant. *Pag 17. in 4.

Ceux qui ne sçavent pas qu'il y a de grandes difficultez, & qu'il faut emploier beaucoup d'élémens dans la construction des Tables, pourront s'étonner de voir que mon calcul ne s'accorde pas exactement avec l'observation ; mais au contraire les Sçavans seront surpris qu'on ait

pu arriver à une si grande justesse, & admireront la connoissance qu'on a acquise du mouvement des corps celestes; car il paroît que les anciens Astronomes étoient fort éloignez de prétendre à une aussi grande précision.

Chacun pourra faire la comparaison de mon observation avec les Ephemerides qui sont publiques, & qui ont été calculées par des particuliers sur des Tables dont la plûpart laissent à juger qu'ils sont les Auteurs.

Cette Eclipse a été observée au Château de *Marli* en présence du Roi & de toute la Cour, par deux Astronomes de l'Académie qui y avoient été mandez par Sa Majesté.

La hauteur du Pole au Château de *Marli* est de 48° 31′ 35″, & la différence des meridiens entre ce Château & l'Observatoire Royal est de 14′ 18″ de degré ou de 57″ d'heure, comme je l'ai conclu des observations qui en ont été faites.

---

* Pag. 178. in 4.

* COMPARAISON

Des Forces centrales avec les Pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

Par M. VARIGNON.

† ON sçait que tout corps qui se meut en rond, ou en ligne courbe quelconque, est dans un effet continuel pour s'échaper suivant la tan-

† 24. Avril 1706.

tangente de cette Courbe à chaque point où il se trouve : de maniére qu'il s'échaperoit effectivement suivant cette touchante, s'il n'étoit incessamment retiré ou repoussé vers le dedans de cette même Courbe.

De cet effort pour s'échaper suivant la touchante de la Courbe que ce corps décrit, à chaque point où il se trouve, il en résulte nécessairement un autre effort en vertu duquel ce même corps tend à s'éloigner de cette Courbe. C'est ce dernier effort que sent la main qui fait tourner une pierre attachée au bout d'une corde qu'elle retient, soit que cette main lui fasse décrire un cercle, en ne lui permettant qu'une certaine longueur, toujours la même, de cette corde ; ou qu'elle lui fasse décrire quelqu'autre Courbe que ce soit, selon qu'elle lui en lâchera plus ou moins : c'est aussi ce même effort qu'on appelle d'ordinaire la *Force-centrifuge* de cette pierre, ou de tout autre corps qui se meut en ligne courbe. Mais comme il y en a aussi de *centripetes*, telles que celle qu'il faudroit pour décrire une Hyperbole par rapport au foyer de son opposée, vers lequel le corps qui la décriroit, tendroit toujours à s'aprocher ; nous les avons appellées jusqu'ici du nom commun de *Forces centrales*, de même que celles que le corps *Décrivant* doit avoir en sens contraire (soit qu'on le tire ou qu'on le pousse) vers le dedans de la Courbe qu'il décrit ; lesquelles Forces * doivent toujours être égales à celles-là (chacune à celle qui lui est directement opposée) pour les contre-balancer, & pour empêcher ainsi ce corps de s'écarter de cette Courbe. L'égalité de ces Forces-ci avec les centrales qu'elles contre-balancent, fera que dans la suite

* Pag. 179 in 4.

on les prendra indifféremment les unes pour les autres selon qu'il sera plus facile de les exprimer.

J'ai déja donné plusieurs Regles générales pour connoitre le raport de ces forces entr'elles, dans les Mémoires de 1700. J'ai même donné la maniére d'en trouver à l'infini dans ceux de 1701. J'ai donné encore en 1703 la maniére d'en trouver aussi une infinité de pareille étendue pour le cas où plusieurs de ces forces centrales agiroient toutes à la fois sur le corps *Décrivant*, quelles que fussent leurs directions & la Courbe résultante de leur concours d'action. De sorte que pour rendre cette Théorie complette, il ne reste plus (ce me semble) qu'à trouver de pareilles Regles pour connoitre absolument ces forces, c'est à dire, pour connoitre leur raport à quelque force connue, telle qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur des corps: En voici encore à l'infini, & toutes aussi générales que les précédentes, dans la Solution du Problême suivant, & dans les conséquences qui s'en tirent.

Avertissement.

Pour démêler les Forces centrales des Corps d'avec leurs Pesanteurs, on supposera par tout dans la suite, que les Courbes qu'on leur fera décrire, seront toutes sur des surfaces mathématiques horizontales, lesquelles rendent ces corps comme sans pesanteur, en soûtenant ce qu'ils en ont.

* Pag. 180. in 4.

* PROBLEME.

Trouver le raport des Forces centrales (tant centrifuges que centripetes) aux Pesanteurs absolues des Corps mûs de vitesses variées à discretion le long de telles Courbes qu'on voudra.

So-

SOLUTION.

† I. Soit une Courbe quelconque *MLN* décrite par le corps *L* mû suivant *MLN* avec telle variation de vitesses qu'on voudra, en tendant toujours vers un point quelconque *C* du plan de cette Courbe, ou directement à contresens: On demande le raport de la pesanteur obsolue de ce corps, avec ce qu'il fait d'effort à chaque point *L* de cette Courbe pour s'en écarter en suivant la tangente *LQ*, ou (ce qui revient au même) avec les forces qui égales à ces efforts, le retiennent toujours sur cette Courbe, en l'attirant ou en le repoussant incessamment & directement contr'eux suivant *LC*. Le point *C* s'appellera le *Centre* de ces forces; & les droites *LC*, *lC*, &c. leurs *Rayons*.

Soit l'arc *Ll* indéfiniment petit, des extrémitez duquel partent les rayons *LC*, *lC*, avec la petite droite *lP* parallele à *LC*, qui rencontre en *P* la tangente *LQ*. Soit de plus *HL* la hauteur de laquelle le corps L tombant par sa pesanteur, il acquieroit en *L* en vertu de cette seule pesanteur, la vitesse qu'il a effectivement en ce point suivant *Ll*, ou pour suivre *LP*: Cette hauteur s'appellera dans la suite *Déterminatrice* de cette vitesse, pour n'être pas obligé de répéter cette grande phrase toutes les fois qu'on en parlera.

‡ II. Cela posé, il est visible que si l'on prend la tangente *LQ* double de la verticale *HL*, & qu'on imagine le corps *L* se mouvoir unifor-

† *Construction & définitions.* FIGUR. I.

‡ *Expression des tems requis au corps* Décrivant *pour acquerir en tombant la vitesse qu'il a le long de chaque élément de la Courbe qu'il décrit, & pour parcourir cet élément de cette même vitesse.*

mément de cette vitesse suivant LQ; non seulement il parcourra cette longueur LQ dans un tems égal à celui qu'il auroit mis à tomber de *H* en *L*, en commençant en *H*; mais encore si l'on prend la partie* indéfiniment petite *LP* de cette tangente pour le tems qu'il mettroit à parcourir de cette même vitesse cet élément *LP*, c'est à dire (*hyp.*) pour le tems qu'il met à parcourir effectivement *Ll*, l'on aura aussi LQ pour celui qu'il employeroit à parcourir ainsi cette même LQ, ou à tomber de *H* en *L* par sa seule pesanteur.

* Pag. 181. in 4.

† III. Cela étant, si l'on suppose que la force centrifuge ou centripete (qui feroit parcourir *lP* au corps *L* dans le tems qu'abandonné à lui-même il parcourroit *LP*, ou que retenu sur la Courbe il parcourt effectivement l'élément *Ll*) agit incessamment & uniformément sur le corps *L* suivant *Pl*, de même que la pesanteur fait de haut en bas dans l'hypothese de *Galilée*; on verra que puisque cette force centrale en *L*, est capable de lui faire parcourir *Pl* dans le tems *LP*; si l'on fait cette analogie $\overline{LP}^2 . \overline{LQ}^2 :: Pl . \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$. Ce quatriéme terme sera l'espace que cette force centrale inhérente comme une espece de pesanteur dans le corps *L*, lui feroit parcourir dans le tems LQ que sa pesanteur (*art.* 2.) le fait tomber de même de

H

† *Expression de l'espace que le corps* Décrivant *parcourroit en vertu de sa force centrale constante pendant un tems égal à celui qu'il lui faudroit pour acquerir en tombant en vertu de sa pesanteur une vitesse égale à ce qu'il en a au point de la courbe où il a cette force centrale.*

H en L; puisqu'alors les espaces seroient comme les quarrez des tems.

† IV. Donc HL & $\frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}$ sont les espaces que la pesanteur du corps L, & sa force centrale en L suivant LC, lui feroient parcourir de la même maniére en tems égaux. Par conséquent ces deux forces doivent être entr'elles comme ces espaces: c'est à dire que si l'on prend p pour la pesanteur de ce corps, & f pour sa force centrale en L par raport au centre C, l'on aura $f. p :: \frac{\overline{LQ}^2 \times Pl}{\overline{LP}^2}. HL$ (à cause que suivant l'art. 2. LQ est $= 2\,HL$, & $LP = Ll$) $:: \frac{4\,\overline{HL}^2 \times Pl}{\overline{Ll}^2}. HL$. Ce qui donne $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant aussi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ pour une Regle générale de comparaison entre les forces centrales & les pesanteurs des corps. *Ce qu'il falloit trouver.*

‡ V. * *Autrement.* Puisqu'on suppose (*art.* 1.) l'élément Ll de la Courbe MLN, parcouru d'une vitesse égale à ce que le corps L qui la décrit, en auroit aquis en L en vertu de sa chute de H en L, & que d'ailleurs ce corps mû de cette vitesse uniforme parcourroit le double de HL dans le tems de cette chute; ce tems de sa chute de H en L, sera au tems qu'il met à parcourir $Ll :: 2\,HL. Ll$. Donc en appellant

* Pag. 182. in 4.

† *Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des Corps.*

‡ *Autre maniére de démontrer la même Regle.*

dt la durée de l'instant que ce corps emploie à parcourir l'élément Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le tems de sa chute faite de H en L en vertu de la seule pesanteur. Par conséquent les espaces ainsi parcourus en vertu des forces constantes & incessamment appliquées, telles qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur, & que toute force centrale l'est à chaque instant, étant en raison composée de ces forces & des quarrez des tems emploiez à parcourir ces espaces; l'on aura aussi (en prenant encore f pour la force centrale du corps L suivant Pl ou LC, & p pour sa pesanteur) $Pl. HL :: f dt^2. p \times \frac{4\overline{HL}^2 dt^2}{\overline{Ll}^2}$.

Ce qui donnera encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll}$ (en prenant aussi h pour HL) $= \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, ainsi qu'on le vient de trouver dans l'art. 4.

† VI. *Autrement encore.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 2. si l'on prend $H\lambda$ pour ce que le corps tombant de H parcourroit de la hauteur HL en vertu de sa seule pesanteur, dans l'instant que sa force centrale lui fait faire Pl; cette force centrale (f) se trouvera pour lors être à la pesanteur (p) de ce corps :: $Pl. H\lambda$. Mais ce tems par Pl, ou par $H\lambda$, étant (*art.* 2.) à celui de la chute de H en L :: LP (Ll). LQ ($2HL$). L'on aura de plus $H\lambda. HL :: Ll \times Ll. 4HL \times HL$. ou $H\lambda = \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Donc on aura aussi pour lors $f. p :: Pl. \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Ce qui don-

† *Troisiéme maniére de démontrer la même Regle.*

donne encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans les art. 4. &5.

† VII. *Autrement encore.* Dans la Remarque des Mémoires* de 1700. pag. 303. en supposant les Courbes *MLN*, *ZET*, décrites par deux corps *L*, *E*, dont les masses étoient *m*, *μ*; leurs forces centrales *f*, *φ*, vers *C*, *D*; les longueurs parcourues en vertu de ces forces à chaque instant, étoient *Pl*, *Fe*, paralleles à *LC*, *ED*; enfin ces instans étoient *dt*, *dθ*: Cela (dis-je) supposé dans cette Remarque, on y a conclu de la page 111. des Mém. de 1693. cette Regle générale $Pl \times m\phi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{\phi d\theta^2}{\mu \times Fe}$ laquelle sera encore démontrée ci-après dans l'art. 10.

*Pag. 1 in 4.

‡ VIII. Soit présentement *p* la véritable pesanteur du corps *E*, telle qu'on la suppose d'ordinaire dans l'hypothese de *Galilée*, & *h* une hauteur finie que ce corps parcoure en vertu de cette pesanteur dans un tems quelconque *θ*, au lieu de tourner autour du point *D* sur la Courbe *ZET*, comme ci-dessus art. 7. Il est visible qu'en substituant *p* au lieu de *φ*; *h* au lieu de *Fe*, & θ^2 au lieu de $d\theta^2$, dans la derniére équation de cet art. 7. l'on aura ici $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$.

Mais si l'on suppose que la vitesse instantanée, & par conséquent uniforme pendant son instant, avec laquelle l'élément *Ll* est parcouru par

K 7

† *Quatrième maniére de démontrer la même Regle par une autre des Mém. de 1700.* FIG. I. IV. ‡ *Comment la Regle en question se deduit de celle des Mém. de 1700. rapportée dans le précedent article 7.*

par le corps L, soit égale à ce que la pesanteur (p) du corps E en donneroit à ce même corps E à la fin de sa chute faite de la hauteur quelconque h, & qu'on prenne cet élément Ll pour le tems ou l'instant (dt) employé par le corps L à le parcourir : l'on aura aussi $2h$ pour le tems (θ) employé par le corps E à tomber de la hauteur h; puisque (suivant *Galilée*) dans ce même tems cette même vitesse acquise (*hyp.*) à la fin de la chute de ce corps, faite de la hauteur h, demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de h; & que d'ailleurs on sçait que les tems sont toujours comme les espaces parcourus avec des vitesses uniformes & égales.

Donc en substituant $2h$ pour θ, ou $4hh$ pour θ^2, & Ll^2 pour dt^2, dans l'équation $\frac{fdt^2}{m \times Pl} = \frac{p\theta^2}{\mu h}$ trouvée au commencement de cet article-ci, l'on aura encore ici $\frac{f \times \overline{Ll}^2}{m \times Pl} = \frac{4ph}{\mu}$. Par conséquent en supposant le corps L égal au corps E, c'est-à-dire $m = \mu$, & sa pesanteur aussi $= p$, l'on aura de même $\frac{f \times \overline{Ll}^2}{Pl} = 4ph$ par raport au seul corps L, ou bien encore $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans les art. 4, 5, & 6.

Pag. 184. n 4.

† IX. Il est ici à remarquer qu'en regardant (ainsi qu'on l'a fait par tout ci-dessus) Pl comme parcourue d'un mouvement acceleré pendant

† *Introduction du rayon osculateur dans la précédente Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, en considérant les élémens des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux mêmes.* Fig. I.

dant que LP est parcourue d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouvemens, doit être ici regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit; & par conséquent comme un véritable arc de ce cercle, & non comme un côté droit de Polygone, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire, & qu'on l'a supposé jusqu'ici dans la recherche des Rayons des Développées. Donc en prenant R pour le centre de ce cercle osculateur en Ll; LR pour celui de ses rayons qui est perpendiculaire à la touchante en L; & Rl pour un autre de ses rayons infiniment près de celui-là, & qui prolongé rencontre en E cette même touchante LQ; la Prop. 36. du Liv. 3. d'*Euclide* donnera $LE \times LE$ $= El \times \overline{ER + lR} = 2LR \times El$, ou $El = \frac{LE \times LE}{2LR}$ $= \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

Or en faisant lF perpendiculaire en F sur la tangente LQ, & LD perpendiculaire en D sur l'ordonnée Cl, laquelle prolongée rencontre en S cette même tangente LQ; les triangles rectilignes semblables EFl, ELR, & SPl, SLC, donneront $El. Fl :: ER. LR.$ Et $Sl. Pl :: SC. LC.$ Et par conséquent aussi $El = FL$, & $Sl = Pl$, à cause que l'arc indéfiniment petit Ll rend $ER = LR$, & $SC = LC$. De plus les triangles rectilignes semblables SFL, SDL, donneront pareillement LS ou $Ll. LD :: Sl$ ou $Pl. lF$ ou $El = \frac{LD \times Pl}{Ll}$.

Donc aiant déja $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, l'on aura enfin $\frac{LD \times Pl}{Ll}$

$\frac{LD \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ou $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$. Donc auſſi

* Pag. 185. in 4. en ſubſtituant cette * valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ des art. 4, 5, 6, & 8, l'on aura $f = \frac{2ph \times Ll}{LR \times LD}$. De ſorte que ſi préſentement on appelle LR, r; Ll, ds; & LD, dx; l'on aura de même en général $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour la Regle de comparaiſon des Forces centrales avec les peſanteurs des corps. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

† X. Afin de n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1700. ni de 1693. qu'ils ſuppoſent pour la preuve de la Regle de l'art. 7. où l'on vient de les citer, voici encore une autre démonſtration de cette Regle.

‡ Toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus art. 8. ſoient de plus les Courbes GHI, OVW, décrites par les corps H, V, mûs ſuivant Hh, Vu, en tendant toujours aux centres A, B, avec des forces leſquelles les empêchent de ſuivre les tangentes HK, VT, en les retirant ou repouſſant inceſſamment vers ces Courbes, de maniére à leur faire parcourir Kh, Tu, paralleles à AH, BV, dans les inſtans qu'ils parcourent effectivement les élémens Hh, Vu, de ces mêmes Courbes. Tout le reſte demeurant comme on le voit dans les Figures 1, 2, 3, 4. ſoient donc.

Les

† *Démonſtration de la Regle des Mémoires de 1700. rapportée ci-deſſus art. 7.* ‡ FIG. I. II. III. IV.

Les corps mûs en lignes courbes... L, H, V, E

Les quantitez dont ils s'approchent de ces Courbes en s'éloignant de leurs tangentes à chaque instant . . . . Pl, Kb, Tu, Fe

Ces mêmes instans . . . . . . $dt, dt, d\theta, d\theta$.

Les Forces centrales en vertu desquelles se font ces approches instantanées . . . . $f, \varphi, \varphi, \varphi$,

Les masses de ces corps . . . m, m, m, μ.

Ces noms supposez, l'on aura $\left\{ \begin{array}{l} Pl.\ Kb :: f.\ \phi. \\ Kb.\ Tu :: dt^2.\ d\theta^2. \\ Tu.\ Fe :: \mu.\ m. \end{array} \right.$

Donc en multipliant ces trois analogies par ordre, l'on * aura aussi $Pl.\ Fe :: \mu f dt^2.\ m\phi d\theta^2$. Et par conséquent $Pl \times m\phi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$, ou $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{\varphi\, d\theta^2}{\mu \times Fe}$, ainsi que dans l'art. 7.

On ne s'arrêtera point ici aux Corollaires qu'on pourroit tirer de cette Regle, ne s'agissant ici que de celle qu'on vient de trouver dans l'art. 9. En voici encore deux Démonstrations différentes dans les deux Solutions suivantes.

AUTRE SOLUTION.

† XI. Toutes choses demeurant les mêmes que dans les art. 4, & 9. les triangles rectilignes semblables RLE, lFE, donneront $RL.\ RE :: lF.\ lE$. De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit LRE rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc la nature du cercle osculateur en Ll, comme de tout autre, don-

† *Regle de comparaison des forces centrales entr'elles* FIG. I.

donnant $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$, l'on aura de même $tF = \frac{Ll \times Ll}{2RL}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$. Donc les triangles rectilignes semblables SDL, SFl, donneront aussi SL ou lL (ds). DL (dx) : : Sl. Fl : : f (force suivant SC ou LC). $\frac{fdx}{ds}$ (force suivant Fl).

De sorte que l'espace Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ est ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ pendant l'instant dt que le corps L décrit l'arc élémentaire Ll au lieu de suivre la tangente LQ, comme il auroit fait sans cette force ou sans f. Donc cette force instantanée $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ lui aiant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, & d'ailleurs étant constant (*art.* 10.) que des espaces ainsi parcourus par un même corps en vertu de forces toujours les mêmes le long de chacun de ces espaces, & toujours appliquées (ainsi qu'on le pense ordinairement de la pesanteur), sont comme les produits de ces forces par les quarrez des tems de leur application non interrompue; l'on aura déja $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ pour une Regle générale du raport des forces centrales entr'elles, tendantes vers C ou directement à * contre-sens, quelque variées qu'elles soient sur une même Courbe quelconque MLN, en conséquence de la variété des vitesses avec lesquelles cette Courbe peut être décrite par un même corps.

* Pag. 187. in 4.

† XII.

† XII. *Autrement.* Soient de plus les ordonnées *CL*, *Cl*, &c. appellées y; & par conséquent $Dl = dy$. Les triangles rectilignes semblables *SDL*, *SFl*, donneront ici *LD* (dx). *SD* ou *lD* (dy) :: *lF* $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et *SL* ou *lL* (ds). *SD* ou *l D* (dy) :: *Sl*. *SF* :: f (force suivant *SC* ou *LC*). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant *SF*). Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.) $\frac{dyds^2}{2rdx} = \frac{fdy}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est-à-dire, encore la même Regle que dans le précedent art. 11.

‡ XIII. *Autrement encore.* Les triangles rectilignes semblables *SDL*, *SFl*, donneront aussi *DL* (dx). *SL* ou *Ll* (ds) :: *Fl* $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.) $\frac{ds^3}{2rdx} = fdt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est-à-dire, encore la même Regle que dans les deux derniers art. 11, & 12.

‡ XIV. Concevons présentement comme dans la premiere Solution, art. 1, 2, & 3. que *HL* est une hauteur d'où le corps *L* tombant, il aquieroit en *L* une vitesse égale à ce que sa rotation suivant *MLN* lui en donne en *L* suivant *L*♋. Cela étant, si l'on suppose aussi *L*♋ double

† *Autre démonstration de la même Regle.* ‡ *Troisiéme démonstration de la même Régle.* ‡ *Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée de la précédente en considérant encore les élémens des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux-mêmes.*

ble de HL, non seulement cette vîtesse demeurant uniforme pourroit porter ce corps de L en Q suivant LQ, dans le tems qu'il auroit mis à tomber de H en L en vertu de sa seule pésanteur; mais encore ce tems seroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir LF ou LS de cette même vitesse uniforme, c'est-à-dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement Ll, comme LQ est à LF ou LS ou Ll: de sorte qu'en prenant LQ pour le tems que le corps L mettroit à tomber de H en L, l'on aura aussi Ll pour l'instant qu'il employe à parcourir cet élément de la Courbe MLN* qu'on le suppose décrire. Donc si l'on prend cet instant pour le premier de sa chute, pendant lequel il parcoure $H\lambda$, l'on aura $\overline{LQ}^2 . \overline{Ll}^2 :: HL . H\lambda = \frac{HL \times \overline{Ll}^2}{\overline{LQ}^2}$ (à cause qu'on suppose ici $Ll = ds$, & $LQ = 2HL = 2b$) $= \frac{ds^2}{4b}$.

*Pag. 188. in 4.

Mais cet instant que le corps L emploie à parcourir Ll, est aussi celui que ses forces (*art.* 11, 12, 13.) $\frac{fdx}{ds}$, $\frac{fdy}{ds}$, f, emploient à lui faire parcourir Fl, SF, Sl, d'un mouvement accéléré à la maniére de celui que sa pesanteur lui donneroit de H en λ pendant ce même instant. Donc sa pesanteur (appellée p) est à chacune de ces forces, comme $H\lambda$ $\left(\frac{ds^2}{4b}\right)$ est à chacune des longueurs Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$, SF $\left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$, Sl $\left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$, qui leur répondent dans les art. 11, 12, 13. c'est-à-dire

1°.

1°. $p. \frac{fdx}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4b}\right). Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right).$

2°. $p. \frac{fdy}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4b}\right). SF \left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right).$

3°. $p. f :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4b}\right). Sl \left(\frac{ds^3}{2rdx}\right).$

Et toutes ces Analogies donnent également chacune $f = \frac{2hpds}{rdx}$, qui est la même Regle de comparaison des forces centrales des corps avec leurs pesanteurs, qu'on a déja trouvé dans la Solut. 1. art. 9. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

† XV. On voit dans cette seconde Solution, non seulement (*art.* 14.) le raport de la pesanteur d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit sur une Courbe aussi quelconque qu'il décriroit de telle vitesse qu'on voudroit, c'est-à-dire, uniforme ou variée à discrétion, en tendant toujours vers un même point (quel qu'il fût) du plan de cette Courbe; mais encore (*art.* 11, 12, 13.) le raport de ces mêmes forces entr'elles, lequel s'exprimant ici par $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, marque que ces forces centrales (f) * doivent toujours être entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$; ce qui s'accorde avec

* Pag. 1[illegible] in 4.

† *Identité de la précédente Regle de comparaison des forces centrales entr'elles, trouvée dans les art.* 11, 12, & 13. *avec celle qui se trouve pour le même sujet dans les Mémoires de* 1701.

avec la Regle $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ que j'ai donnée de ce dernier raport dans les Mém. de 1701. pag. 27. & 28. où l'on appelloit n, y, dz, cè que l'on appelle ici f, r, dx. Le signe d'égalité dans les choses disparates & hétérogenes (telles que sont ces forces & les grandeurs qui les expriment ici) ne signifiant que des égalitez de raports. De sorte que $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ ne signifie autre chose non plus, sinon que le raport des forces centrales f entr'elles, est toujours le même que celui qui se trouve entre les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, quelque nombre (entier ou rompu, &c.) ou quelqu'autre grandeur constante que m puisse signifier: soit que m signifie l'unité, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$ de 1701. ou qu'elle signifie un demi, comme dans la formule $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ des articles 11, 12, 13. sans qu'il s'ensuive $\frac{ds^3}{rdxdt^2} = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, ou $1 = \frac{1}{2}$, quoique la force f soit ici la même de part & d'autre; parceque ce ne seroient plus ici des égalitez de raports, mais de grandeurs homogenes entr'elles. Aussi cette expression $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$ du raport des forces centrales entr'elles, se trouvera-t-elle comme les précédentes $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$.

Car

Car puisque les espaces $Fl\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ parcourus (*art.* 11.) en vertu des forces instantanées $\frac{fdx}{ds}$, continuellement appliquées chacune suivant le sien, & toujours les mêmes chacune pendant l'instant dt de son application non interrompue, sont entr'eux (*art.* 10.) comme les produits $\frac{fdx}{ds}\times dt^2$ de chacune de ces forces par le quarré de son instant ; & que d'ailleurs ces espaces $\frac{ds^2}{2m}$ sont aussi entr'eux comme leurs* produits $\frac{mds^2}{r}$ par quelque grandeur constante $2m$ que ce soit; l'on aura aussi ces produits $\frac{mds^2}{r}$ en même raison que les autres $\frac{fdx}{ds}\times dt^2$: ce qui donnera $\frac{mds^2}{r}=\frac{fdx}{ds}\times dt^2$, ou $f=\frac{mds^3}{rdxdt^2}$, par la même raison qu'on a trouvé ci-dessus (*art.* 11.) $\frac{ds^2}{2r}=\frac{fdx}{ds}\times dt^2$, ou $f=\frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, & dans les Mém. de 1701. $\frac{ds^2}{r}=\frac{fdx}{ds}\times dt^2$, ou $f=\frac{ds^3}{rdxdt^2}$; tout cela ne signifiant autre chose sinon que les forces centrales f tendantes suivant des lignes qui passent toutes par un point quelconque du plan de quelque Courbe que ce soit, décrite avec telle variation de vitesse qu'on voudra, seront par tout entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, ainsi qu'on le vient de dire,

* Pag. 190. in 4.

&

& qu'on l'avoit déja dit dans les Mém. de 1701.

† XVI. La seconde Solution précédente se peut encore trouver sans toucher à ce raport des forces centrales entr'elles, en reprenant seulement ici quelque chose de ce qui y a conduit dans l'art. 12. Et comme il y a peu de chose à répéter de cet article, nous l'allons faire pour rendre ici cette Solution complette, en appliquant seulement l'art. 14. à ce que nous allons démontrer, comme il se trouve appliqué à l'art. 12.

Toutes choses demeurant donc encore les mêmes que dans les art. 4. & 9. les triangles rectilignes semblables *RLE*, *lFE*, donneront *RL*. *RE* :: *lF*. *lE*. De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit *LRE* rendant $RL = RE$, l'on aura pareillement $lF = lE$. Donc le cercle osculateur de la Courbe *MLN* en son élément *Ll* pris, non comme un côté droit de polygone, mais comme un véritable arc de cercle, donnant (par sa nature de cercle) $lE = \frac{lE \times lE}{ER + Rl}$ $= \frac{Ll \times Ll}{2Rl}$, l'on aura de même $lF = \frac{Ll \times Ll}{2Rl}$ (*art.* 9.) $= \frac{ds^2}{2r}$.

De plus les triangles rectilignes semblables *SDL*, *SFL*,* donneront aussi *DL* (*dx*). *SD* ou *lD* (*dy*) :: *Fl* $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $SF = \frac{dyds^2}{2rdx}$. Et *SL* ou *Ll* (*ds*). *SD* ou *lD* (*dy*) :: *Sl*. *SF* :: *f* (force suivant *SC* ou *LC*). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant *SF*).

* Pag. 191. in 4.

Ajoû-

† *Solution de l'art. 14. sans toucher au rapport des forces centrales entr'elles.*

Ajoûtez à ceci l'art. 14. & il en résultera, comme de l'art. 12. la formule $f = \frac{2hpds}{rdx}$ trouvée dans ce même art. 14. & dans l'art. 9.

Cet art. 16. n'est que pour faire sentir comment on auroit pu se passer de la Regle des forces centrales entr'elles, pour trouver les trois Solutions de l'art. 14. Ce qu'on vient de dire de la seconde, se dira de même de la première & de la troisiéme, en se servant des art. 11. & 13. comme l'on vient de faire de l'art. 12.

TROISIE'ME SOLUTION.

† XVII. Jusqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps *L* en chaque point *L* de la Courbe *MLN* qu'on le suppose décrire de telle vitesse qu'on voudra; comme une espece de pesanteur ou de force constante tendante vers *C*, laquelle agissant incessamment sur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement aritmetiquement accéléré le côté *LK* du parallelogramme *PK*, ou son opposé *Pl*, pendant l'instant que libre en *L*, sa vitesse de rotation en ce point *L* suivant *L*℈, lui feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite *LP* de cette tangente; & le mouvement résultant de ces deux-là suivant l'élément *Ll*, devant se faire en ligne courbe, nous avons été obligez de regarder cet élément & les autres de la Courbe *MLN*, comme véritablement courbes en ces endroits, & la tangente *lL*℈ au

 seul

† *Démonstration de la même Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée présentement de la considération des Courbes sous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.* FIG. V.

lui faire parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit acquis en L en vertu de sa chute, & dans un tems égal à celui de cette chute de H en L. Donc la force totale de ce corps à la fin de sa chute en L en vertu de sa seule pesanteur, est égale au produit de sa pesanteur par le tems qu'il emploieroit à parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit ainsi acquis en L, c'est à dire (*hyp.*) égale à sa vitesse de rotation en L.

On prouvera de même que la force de ce corps acquise en l par son espece de chute de P en l en vertu de sa seule force centrale, doit aussi être égale au produit de cette force centrale par le tems qu'elle emploieroit à le faire aussi tomber de P en l, ou (*hyp.*) que sa vitesse uniforme de rotation emploieroit à lui faire parcourir LP ou LT.

Donc en prenant les longueurs LT, LY, pour les tems que le corps L emploieroit à les parcourir de cette vitesse uniforme de rotation; p, pour la pesanteur de ce corps; & f, pour sa force centrale en L suivant LC; l'on aura $p \times LT$ pour la force totale de ce corps acquise en L par sa chute de H en L en vertu de sa seule pesanteur; & $f \times LY$ pour sa force totale pareillement acquise en l par une semblable chute de P en l en vertu de sa seule force centrale. Donc aussi *(*art.* 17.) $LY . LG :: p \times LT . f \times LY$. ou

* Pag. 194. in 4. $f = \frac{p \times LT \times LG}{LT \times LY}$ (à cause qu'on suppose ici $LT = 2HL$, & $LG = Yl$) $= \frac{2p \times HL \times Yl}{LY \times LT} = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$.

† XIX. Cela étant, si l'on prend (comme l'on

† Conclusion.

l'on vient de faire art. 17.) la Courbe MLN pour un polygone infiniti-latere, dont RL, Rl, soient deux rayons de sa Dévelopée, & que lZ soit un arc de cercle décrit du centre L; la ressemblance des triangles LRl, lLZ, donnera $RL. Ll :: Ll. lZ = \frac{Ll \times Ll}{RL}$. Et si l'on prolonge Cl jusqu'à la rencontre en X de la tangente LT, la ressemblance des triangles XDL, XZl, donnera aussi $DL. LX$ ou $Ll :: Zl\ (\frac{Ll \times Ll}{RL}). Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Mais les triangles XTl, XLC, que Tl (hyp.) parallele à LC, rend semblables, donnant $Xl. Tl :: XC. LC$. Et l'angle XCL (*hyp.*) infiniment petit, rendant de plus $XC = LC$; l'on aura pareillement $Xl = Tl$. Donc aussi $Tl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Par conséquent en substituant cette valeur de Tl dans la formule $f = \frac{2p \times HL \times Tl}{Ll \times Ll}$ qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 18. l'on aura de même $f = \frac{2p \times HL \times Ll}{Rl \times DL}$. Donc en appellant encore HL, h; RL, r; Ll, ds; & DL, dx; l'on aura encore ici $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour Regle générale de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, comme dans les art. 9. & 14. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SCHOLIE.

† XX. Puisque (*art.* 18.) $f \times LT$ est la force to-

† *Regle générale du raport des forces centrales entr'elles.*

totale du corps L, aquise en l par sa chute (pour ainsi dire) de P en l en vertu de sa seule force centrale f, & que LT exprime l'instant que cette force centrale emploieroit à lui faire parcourir Tl d'un mouvement uniforme, ou que ce même corps emploie à parcourir effectivement Ll; si l'on prend dt pour cet instant, l'on aura fdt pour la force
* Pag. 195. in 4. qui * pourroit lui faire parcourir ainsi Tl d'un mouvement uniforme pendant ce même instant; & par tout de même. Or on sçait qu'en ce cas le produit fdt^2 d'une telle force fdt par son instant dt, est toujours proportionel à cette Tl correspondante. Donc ici $\frac{fdt^2}{Tl}$ est une fraction constante égale, par exemple, à telle grandeur constante m qu'on voudra, c'est à dire $\frac{fdt^2}{Tl} = m$; & par conséquent aussi $f = \frac{m \times Tl}{dt^2}$. Mais on vient de trouver (*art.* 19.) $Tl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Donc enfin $f = \frac{m \times Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL \times dt^2}$: de sorte qu'en appellant encore RL, r; DL, dx; & Ll, ds; l'on aura de même $f = \frac{mds^3}{rdx dt^2}$ pour la Regle générale du

raport des forces centrales entr'elles, ainsi qu'on l'a déja trouvée sur la fin de l'art. 15. Ce qui fait voir ici, comme là, que les forces centrales d'un même corps quelconque suivant des ordonnées concourantes en quelque point que ce soit du plan d'une Courbe aussi quelconque qu'il décriroit avec telle variation de vitesses que ce fût, doivent toujours être entr'elles com-

comme les fractions $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$ correspondantes.

† XXI. Il est encore à remarquer que cette même Regle du raport des forces centrales entr'elles, se peut encore tirer de celle du raport de ces forces aux pesanteurs des corps qui en sont affectez, trouvée ci-dessus art. 9. 14. & 19. Car $2p$ étant constant dans cette Regle $f = \frac{2pbds}{rdx}$, elle fait déja voir que sur une même Courbe quelconque décrite par un même corps aussi quelconque avec telle variété ou variation de vitesses que ce soit, les forces centrales (f) doivent toujours être entr'elles comme les fractions correspondantes $\frac{bds}{rdx}$. Mais les hauteurs b d'où ce corps devroit tomber pour acquerir à la fin de ses chutes les mêmes vitesses qu'il a à chaque point de la Courbe qu'il décrit, étant (suivant *Galilée*) comme les quarrez vv de ces vitesses que j'appelle v; si l'on substitue vv au * lieu de b dans la fraction précédente $\frac{bds}{rdx}$, il en résultera celle-ci $\frac{vvds}{rdx}$ qui suivra aussi toujours la raison de celle-là. Donc les forces centrales (f) seront de même ici toujours entr'elles comme les fractions $\frac{vvds}{rdx}$ correspondantes. Mais on sçait d'ailleurs que les vitesses (v) avec chacune desquelles chaque élément Ll (ds) est parcouru pendant chaque instant (dt), sont aussi toujours entr'elles

* Pag. 196 in 4.

† *La même Regle tirée de celle du raport de ces mêmes forces centrales aux pesanteurs des corps où ces forces se trouvent.*

les comme les fractions $\frac{ds}{dt}$ correspondantes. Donc en substituant cette fraction dans la présente à la place de v, on trouvera encore ici les forces centrales (f) en raison des fractions, correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$, ou $\frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, ou $\frac{mds^3}{rdxdt^2}$, ainsi que les donnent les Regles $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, & $f = \frac{mds^3}{rdxdt^2}$, trouvées dans les Mém. de 1701. pag. 27, 28. & ci-dessus art. 11, 12, 13, 15, & 20. lesquelles ne signifient toutes que le même raport de forces centrales entr'elles.

Pour ce qui est de la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$ *du raport de ces mêmes forces centrales avec la pesanteur de ce corps, trouvée ci-dessus dans les art.* 9. 14. 19. *on la trouvera encore de deux autres manières ci-après dans les art.* 47. *&* 56. *En attendant en voici seulement quelques Corollaires où ces pesanteurs seront prises à l'ordinaire pour des forces finies.*

COROLLAIRES.

De la Regle $f = \frac{2phds}{rdx}$ *trouvée dans les art.* 9, 14, *&* 19. *Fig.* 1, *&* 5.

XXII. *Corol.* 1. Il suit en général de cette Regle.

† 1°. Que lorsque les forces centrales agissent sui-

† *Premier cas où les forces centrales doivent être infinies par raport aux pesanteurs,* FIG. I. V.

suivant des rayons ou des directions qui touchent les Courbes qu'elles font décrire aux corps où elles se trouvent ; alors ds se trouvant infinie par raport à dx qui pour lors devient nulle par raport à cet élément ds de la Courbe en question, la valeur $\frac{2phds}{rdx}$ de la force centrale (f) du corps qu'on suppose *décrire cette Courbe, devient aussi infinie par raport à sa pesanteur, soit que le rayon (r) de la Dévelopée de cette même Courbe soit fini ou zero, tout le reste $2ph$ étant (*hyp.*) fini dans cette fraction. * Pag. 197. in 4

† 2°. Que non seulement en ces points d'attouchement, mais encore par tout où le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en question sera zero, les forces centrales (f) du corps qui la décrira, seront encore infinies par raport aux pesanteurs ; puisque leur valeur générale $\frac{2phds}{rdx}$ le sera toujours aussi pour lors, à cause que la grandeur $2ph$ y sera toujours finie, & que ds ne peut jamais être moindre que dx.

‡ 3°. Au contraire si le rayon (r) de la dévelopée de la Courbe en question se trouvoit infini, la force centrale (f) qui répondroit au point de cette Courbe où ce rayon osculateur aboutiroit, seroit alors seulement finie ou zero, selon que le rayon ou la direction de cette force toucheroit cette Courbe en ce point, ou non : Dans le premier cas cette force seroit finie ou de même genre que la pesanteur, parce qu'alors ds seroit infinie par raport à dx comme

 le

† *Second cas où les forces centrales doivent encore être infinies par raport aux pesanteurs.*

‡ *Cas où les forces centrales ne peuvent être que finies, ou nulles.*

r le feroit par raport à b; & dans le fecond cette force feroit nulle ou zero par raport à la pesanteur, parce qu'alors la fraction $\frac{2phds}{dx}$ le feroit par raport à r.

Le premier de ces deux cas est aussi celui du mouvement d'un corps suivant une ligne droite qui passeroit par le centre de ses forces, par exemple, suivant une verticale qui passe par le centre de sa pesanteur, toute ligne droite pouvant être regardée comme une Courbe dont les rayons osculateurs sont par tout infinis; puisqu'une Courbe dont tous les rayons osculateurs deviendroient ainsi infinis, dégénereroit en ligne droite.

† 4°. Au contraire en tout autre cas que les précédens (n. 1, 2, & 3,) les forces centrales (f) seront toujours finies tant que les pesanteurs (p) des corps où elles se trouvent, & leurs vitesses, ou les hauteurs (b) qui les déterminent aux différens points des Courbes que ces corps décrivent, seront finies, ainsi qu'on les suppose par tout dans * cet écrit. Je dis tant que les pesanteurs (p) & les hauteurs (b) seront finies: parceque quand il n'y auroit qu'une de ces deux grandeurs p ou b qui fût infinie dans la Regle $f = \frac{2pbds}{rdx}$, il est manifeste que le rayon (r) de la Dévelopée de la Courbe en question, y devroit être infini pour que la force (f) y demeurât finie. Et si les deux grandeurs p & b sont toutes deux infinies dans cette Regle, il n'est pas moins clair que la force centrale (f) du corps *décrivant* où cela se trouveroit, seroit infinie dans tous les points de la Courbe qu'il dé-

* Pag. 198. n. 4.

† *Cas où les forces centrales sont toujours finies.*

riroit, même en ceux où le rayon (r) de sa Dévelopée seroit infini, dx ne pouvant jamais être infini par raport à ds.

† XXIII. *Corol.* 2. Il suit de la même Regle $f = \frac{2pbds}{rdx}$ que lorsque le centre C des forces est en R, c'est-à-dire, lorsque les forces centrales du corps L qu'on suppose décrire la Courbe MLN, tendent suivant les rayons RL correspondans de la Dévelopée de cette Courbe, ou que leur centre C est sur cette Dévelopée; alors LD se confondant avec Ll, & rendant par là $dx = ds$, l'on aura $f = \frac{2pb}{r}$ ou $f.p :: 2b.r :: b.\frac{1}{2}r$. C'est-à-dire en général, qu'alors en chaque point L de quelque Courbe MLN que ce soit, la pesanteur du corps L qu'on suppose la décrire en tendant toujours suivant le rayon LR correspondant de la Dévelopée de cette Courbe, sera à sa force centrale ou de tendance suivant LR, comme la moitié de ce rayon de Dévelopée, à la hauteur d'où ce corps tombant auroit acquis à la fin de sa chute en vertu de sa seule pesanteur, une vitesse égale à celle (quelle qu'elle soit) qu'il a effectivement en chaque point L suivant l'élément correspondant Ll de cette même Courbe MLN.

‡ XXIV. *Corol.* 3. Donc lorsque de telles hauteurs (b) seront comme les correspondans des rayons (r) de la Dévelopée de cette Cour-

 be

† *Raport des forces centrales aux pesanteurs des corps lorsque les directions de ces forces sont suivant les rayons osculateurs des Courbes que ces corps décrivent.*

‡ *Cas où les forces centrales dirigées suivant les rayons osculateurs des Courbes en question, sont égales entr'elles.*

be *MLN*, c'est-à-dire, lorsque les vitesses le long de cette Courbe *MLN* seront comme les racines de ces rayons correspondans; les forces centrales * tendantes suivant ces mêmes rayons, seront égales entr'elles: puisque le raport de *h* à $\frac{1}{2}$ *r*, se trouvant alors constant, celui de *f* à *p* constante le seroit de même.

* Pag. 199. in 4.

† XXV. *Corol.* 4. D'où il suit de plus que toutes ces forces du corps *L* seroient non seulement égales entr'elles, mais aussi égales chacune à la pesanteur de ce corps, si ce raport constant des hauteurs (*h*) aux moitiez des rayons (*r*) correspondans de la Dévelopée de la Courbe *MLN* qu'on le suppose décrire avec les vitesses que ces hauteurs déterminent, étoit un raport d'égalité: c'est-à-dire, si chacune de ces hauteurs (*h*) étoit égale à la moitié de chaque rayon (*r*) correspondant de la Dévelopée de cette Courbe *MLN*; ou (ce qui revient au même) si les vitesses de ce corps à chaque point *L* suivant cette Courbe, étoient chacune la même que celle qu'il acquieroit en vertu de sa seule pesanteur en tombant de la hauteur de la moitié du rayon osculateur correspondant. Et réciproquement, &c.

‡ XXVI. *Corol.* 5. Il suit de tout cela que la

† *Cas où les forces centrales d'un même corps sur une même Courbe, seroient non seulement égales entr'elles, mais aussi à la pesanteur de ce corps.*

‡ *Sur un cercle les forces centrales dirigées suivant ses rayons, seroient à la pesanteur du corps qui le décriroit, comme chacune des hauteurs déterminatrices des vitesses correspondantes de ce corps sur ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle, & par conséquent égales à cette pesanteur, quand cette hauteur le seroit à ce demi-rayon.*

la Dévelopée du cercle se réunissant toute au centre de ce même cercle, non seulement la force centrale du corps qui le décrira de quelque vitesse que ce soit, en tendant toujours suivant des lignes qui passent toutes par ce point, c'est-à-dire, suivant les rayons de ce cercle, sera toujours à la pesanteur de ce même corps, comme la hauteur déterminatrice de sa vitesse en chaque point de la circonférence de ce cercle, sera à la moitié du rayon de ce même cercle; mais aussi que lorsque cette hauteur se trouvera égale à la moitié de ce rayon, la force centrale du corps qui décrira ainsi ce cercle, devra être de même égale à sa pesanteur, ainsi que M. *Huygens* l'a trouvé, & plusieurs autres après lui.

Il suit réciproquement que lorsque ces deux forces seront égales entr'elles, cette hauteur déterminatrice de la vitesse du corps *décrivant*, sera aussi égale à la moitié du rayon du cercle qu'on *le* suppose décrire.

† XXVII. *Corol.* 6. Puisque (*art.* 24.) les forces centrales suivant les rayons d'un cercle, qu'auroit un corps qui*le décriroit avec quelque varieté de vitesses que ce fût, seroient toujours chacune à la pesanteur de ce corps, comme la correspondante des hauteurs déterminatrices de ses vitesses aux différens points de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle, il suit encore delà que ces forces centrales du corps *décrivant* doivent toujours être entr'elles comme les correspondantes des hauteurs déterminatrices de ses vitesses sur le cercle qu'il décrit; & par conséquent aussi comme les quarrez de

*Pag. 200 in 4.

 ces

† *Ces forces centrales ainsi dirigées sur un cercle, doivent aussi toujours être entr'elles comme les quarrez des vitesses du corps décrivant.*

* Pag. 203. in 4.

* C'est ainsi que les six Regles générales de l'art. 28. en produiront de nouvelles à l'infini, selon la varieté infinie des termes constans que peut fournir $z^l y^m s^n dz^\lambda du^\mu dy^q dx^r$; ce qui est présentement trop visible pour s'y arrêter davantage. Passons donc à quelques exemples qui en fassent voir l'usage: la seconde des Formules de cet article-ci nous suffira; on se servira de même des autres à l'infini.

EXEMPLE I.

† XXX. Soit la Spirale logarithmique ordinaire *MLN*, dont *C* soit le centre auquel tende sans cesse le corps qui la décrit de quelque vitesse que ce soit. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir $CL = y$, $LD = dx$, &c. la nature de cette Courbe étant de faire par tout des angles égaux avec ses ordonnées *CL*, & par conséquent de rendre partout la fraction $\frac{dy}{dx}$ constante; si l'on suppose de plus chaque dx constante par raport aux immédiatement suivantes de part & d'autre; cette hypothese de $ddx = 0$, rendra pareillement ici $ddy = 0$. Donc cette même hypothese de dx constante donnant d'ailleurs (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$ pour toutes sortes de Courbes, l'on aura pour celle-

† FIG. VI. *Sur la Spirale logarithmique les forces centrales dirigées suivant les ordonnées ou par le centre de cette Courbe, sont à la pesanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs déterminatrices de ses vitesses à chaque point, sont à la moitié des ordonnées correspondantes.*

celle ci $f = \frac{ds^2}{yds^2} \times 2pb = \frac{2pb}{y}$, ou $f. p :: b. \frac{1}{2}y$. C'est-à-dire que les forces centrales du corps L suivant LC, doivent être ici à sa pesanteur, comme les hauteurs (b) déterminatrices de ses vitesses en chaque point L suivant Ll, sont à la moitié de chacune des ordonnées correspondantes LC. (y).

M. *De Fontenelle* a remarqué en faisant l'extrait de ceci, que la même chose se peut encore tirer immédiatement de la troisiéme des Regles générales de l'art. 28. sans y supposer de constant que la fraction $\frac{dy}{dx}$ rendue telle par la nature de la Courbe en question. En effet cette fraction donnant ici $dxddy = dyddx$, si l'on substitue un des membres de cette équation à la place de l'autre dans cette troisiéme Regle; cette même Regle se changera * pour ici en $f = \frac{dxds^2}{ydxds^2} \times 2pb = \frac{2pb}{y}$: D'où résulte $f. p :: b. \frac{1}{2}y$, comme ci-dessus. *Pag. 204. in 4.

† XXXI. Mais on a vû dans l'art. 23. que si les forces centrales du corps L, tendoient suivant les rayons correspondans LR de la Dévelopée PR de la Spirale logarithmique MLN dont il est ici question, l'on auroit aussi pour lors $f. p :: b. \frac{1}{2} LR$. Donc sçachant d'ailleurs (*Anal. des Infin. petits, art.* 91.) que les ordonnées LC de cette Spirale sont toutes propor-

† *Les forces centrales dirigées suivant une ordonnée quelconque de Spirale logarithmique, & ensuite suivant son rayon osculateur correspondant, sont égales entr'elles tant que les hauteurs déterminatrices des vitesses correspondantes du corps* Décrivant *seront comme ces lignes.*

portionelles aux rayons correspondans *LR* de sa Dévelopée, il est visible qu'à chaque point *L* les forces centrales du corps *L* tendant successivement suivant l'ordonnée *LC* & suivant le rayon *LR* correspondans, seront égales entr'elles, tant que les hauteurs (*b*) déterminatrices des vitesses en ce point pour l'un & pour l'autre de ces cas, seront comme ces lignes: c'est-à-dire, tant qu'au même point *L* la vitesse (suivant *Ll*) de ce corps tendant vers *C*, sera à la vitesse de ce même corps tendant vers *R*, comme la racine quarrée de *LC* à une pareille racine de *LR*; & ces hauteurs seront aussi proportionelles entr'elles.

† XXXII. Il est ici à remarquer que le cercle pouvant passer pour une espece de Spirale logarithmique perpendiculaire à toutes ses ordonnées, lesquelles seront ici tout à la fois les rayons de la Dévelopée de cette Spirale logarithmique & ceux de ce cercle au centre duquel toute cette Dévelopée se réuniroit; il suit encore de l'art. 30. ce qui a déja été trouvé dans l'art. 26., sçavoir, que les forces centrales d'un corps quelconque suivant les rayons d'un cercle qu'il décriroit avec telle varieté ou variation de vitesses qu'on voudroit, seroient toujours chacune à sa pesanteur, comme la hauteur déterminatrice de sa vitesse en chaque point correspondant de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle; & conséquemment aussi que lorsque cette hauteur se trouvera égale à ce demi-rayon de cercle, cette force centrale sera pareillement égale à la pesanteur du corps qui le décrira.

Delà suit encore l'art. 27. ainsi qu'on l'a déja

† *Nouvelle preuve des art.* 26. & 27.

ja conclu de l'art. 26. qu'on voit renfermé dans celui-ci.

* EXEMPLE II.

*Pag 205. in 4.

† XXXIII. Soit en général *CLMLN* une Spirale *Fermatienne* quelconque, dont *C* soit le centre, aussi-bien que de l'arc infiniment petit *LD*, & du cercle *MEFM* répondant à telle révolution qu'on voudra de cette Spirale. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir $CL = y$, $LD = dx$, $Ll = ds$; soit la circonférence $MEFM = c$, & son rayon CM ou $CE = a$.

L'on aura la somme ($\int Ee$) des Ee, pour l'abscisse de cette circonférence depuis le commencement des révolutions jusqu'en E; ce qui donnera $c . \int Ee :: a^m . y^m$. D'où résulte $cy^m = a^m \times \int Ee$ pour l'équation de ces Spirales en général. Donc $mcy^{m-1} dy = a^m \times Ee$. Mais $CL (y) . CE (a) :: LD (dx) . Ee = \frac{adx}{y}$. Donc aussi $mcy^{m-1} dy = \frac{a^{m+1} dx}{y}$, ou $dy = \frac{a^{m+1} dx}{mcy^m}$; ce qui donne $\frac{a^{2m+2} dx^2}{mmccy^{2m}} + dx^2 = dy^2 + dx^2 = ds^2$, ou $ds^2 = \frac{a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}} \times dx^2$; & de plus (en faisant dx constante) l'on aura $ddy = \frac{-a^{m+1} y^{m-1} dy dx}{cy^{2m}}$

† *Raport général des forces centrales aux pesanteurs des corps sur toutes sortes de Spirales* Fermatiennes *suivant les ordonnées desquelles ces forces seroient dirigées.*

FIG. VII.

$= \frac{-a^{m+1}dydx}{cy^{m+1}}$ (à cause de $dy = \frac{a^{m+1}dx}{mcy^m}$) $= \frac{-a^{2m+2}dx^2}{mccy^{2m+1}}$. Donc cette hypothese de dx constante, donnant (*article* 29. *nombre* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2pb$, la substitution de ces valeurs de ds^2 & de ddy dans cette formule, donnera aussi

$$f = \frac{\frac{a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{mmccy^{2m}} \times dx^2 + \frac{a^{2m+2}}{mccy^{2m}} \times dx^2}{\frac{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+1}}{mmccy^{2m}} \times dx^2}$$

$\times 2pb = \frac{\overline{m+1} \times a^{2m+2} + mmccy^{2m}}{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+2}} \times 2pb$: C'est à dire en général pour toutes ces Spirales *Fermatiennes* à l'infini ; $f.p::b.\frac{ya^{2m+2} + mmccy^{2m+1}}{\overline{2m+2} \times a^{2m+2} + 2mmccy^{2m}}$.

* Pag. 206. in 4. * Il n'y a plus qu'à détailler cette Formule ou Analogie par la substitution de telle valeur qu'on voudra donner à m, pour avoir le raport de p à f, c'est-à-dire, de la pesanteur du corps qu'on suppose décrire la Spirale déterminée par cette valeur de m, aux forces centrales de ce même corps suivant les ordonnées de cette Spirale. Par exemple, la Spirale d'*Archimede*, qui est la prémiere de ces *Fermatiennes*, aiant $m = 1$, l'Analogie précédente donnera pour elle $f.p::b.\frac{ya^4 + ccy^3}{4a^4 + 2ccyy}$. Au contraire la premiére des Spirales hyperboliques *Fermatiennes* aiant $m = -1$, l'on

l'on aura pour elle $f.\ p :: h.\ \frac{ya^0 + ccy^{-1}}{2ccy^{-1}} :: h.\ \frac{y^3+4ccy}{2cc}$. Et ainsi de toutes les autres Spirales *Fermatiennes*, tant paraboliques que hyperboliques à l'infini.

On trouvera aussi de même le raport des forces centrales aux pesanteurs des corps mûs suivant toutes les autres Spirales résultantes de la génération générale qu'on en a donné dans les Mém. de 1704. pag. 91. &c.

EXEMPLE III.

† XXXIV. Soit *MLN* l'Ellipse ordinaire décrite par le corps *L* mû comme l'on voudra en tendant toujours suivant des directions ou lignes droites qui passent toutes par un de ses foyers, par exemple par le foyer *C*; soit $MN = a$, le grand axe de cette Ellipse, & la distance de ses foyers entr'eux $= c$. Tout le reste demeurant le même que ci-dessus art. 28. sçavoir les ordonnées *CL*, *Cl*, indéfiniment proches l'une de l'autre; l'arc *LC* décrit du centre *C*; $CL = y$, $LD = dx$, $Ll = ds$.

La nature de cette Ellipse donnera $dy\sqrt{aa-cc} = dx\sqrt{cc-aa+4ay-4yy}$ pour son équation à son foyer *C*, ou (en prenant $bb = aa - cc$) $b\,dy = dx\sqrt{4ay-4yy-bb}$. Donc $\overline{4ay-4yy} \times dx^2 = bbdy^2 + bbdx^2 = bbds^2$, ou $ds^2 = \frac{4ay-4yy}{bb} \times dx^2$. Or en faisant (si l'on veut)

dx

† *Raport des forces centrales aux pesanteurs des corps sur l'Ellipse ordinaire, par un des foyers de laquelle ces forces seroient dirigées.* FIG. VIII.

dx constante, cette même équation $b\,dy = dx\,\sqrt{4ay-4yy-bb}$ donnera * de plus $ddy = \frac{2adydx-4ydydx}{b\sqrt{4ay-4yy-bb}} = \frac{2adx^2-4ydx^2}{bb}$. Donc cette même hypothese de *dx* constante, donnant (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2-yddy}{yds^2}\times 2ph$, elle donnera aussi dans le cas présent $f = \frac{\overline{4ay-4yy}\times dx^2 - \overline{2ay+4yy}\times dx^2}{\overline{4ay-4yy}\times y dx^2}\times 2ph = \frac{2ay}{4ayy-4y^3}\times 2ph = \frac{aph}{ay-yy}$, ou $f.p :: h.\frac{ay-yy}{a}$. D'où l'on voit que les forces centrales tendantes suivant des directions ou des lignes droites qui passent toutes par un des foyers de l'Ellipse ordinaire, sont toujours à la pesanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs (h) déterminatrices des vitesses de ce corps le long de cette Courbe, aux fractions $\frac{ay-yy}{a}$ faites des y (CL) correspondantes aux points où il a effectivement les vitesses que ces hauteurs déterminent, c'est-à-dire, les mêmes vitesses qu'il acquieroit en tombant de ces hauteurs (h) en vertu de sa seule pesanteur.

* Pag. 207. in 4.

† XXXV. Si présentement on suppose que l'Ellipse précédente (*art.* 34.) se change en un cercle dont C soit le centre, & MN (a) le diamétre; en ce cas CL (y) se trouvant le rayon (r) $\frac{1}{2}a$ de ce cercle, la formule $f = \frac{aph}{ay-yy}$ qu'on vient (*art.* 34.) de trouver, se changera ici en $f =$

† *Nouvelle preuve des art.* 26, 27, & 32.

$f = \frac{4ph}{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa} = \frac{4ph}{\frac{1}{4}aa} = \frac{4ph}{a} = \frac{4ph}{2r} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donnera ici $f.p.::b.\frac{1}{2}r.$ C'est à dire que les forces centrales d'un corps qui décriroit un cercle avec telles vitesses qu'on voudroit, en tendant toujours suivant les rayons de ce cercle, comme lorsqu'il le décrit attaché à un des bouts d'une corde non extensible & fixe par l'autre bout au centre de ce cercle, seroient à sa pesanteur en chaque point de la circonférence de ce cercle, comme la hauteur déterminatrice de sa vitesse en ce point seroit à la moitié de son rayon, ainsi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. & 32. D'où l'on voit encore (comme dans ces deux articles) que lorsque cette hauteur sera égale à ce demi-rayon, la force centrifuge de ce corps sera aussi précisément égale à sa pesanteur; & réciproquement.

*XXXVI. † De la maniére dont on vient de trouver (*art.* 34.) $f = \frac{aph}{ay - yy}$, pour l'Ellipse, on trouvera aussi $f = \frac{aph}{ay + yy}$, ou $f.\ p :: b.\ \frac{ay + yy}{a}$. pour l'hyperbole dont le centre *C* des forces ou des tendances du corps *L* en la décrivant, seroit le foyer intérieur; puisqu'en prenant $bb = cc - aa$, à cause que la distance (c) des foyers de cette Courbe, est plus grande que son diamétre transverse (a), son équation à ce centre ou foyer *C*, sera $bdy = dx\sqrt{4ay + 4yy - bb}$. *Pag. 208. in 4.

‡ XXXVII. Mais si ce centre *C* des forces du

† *Raport des forces centrales aux pesanteurs des corps sur l'hyperbole ordinaire. par le foyer interieur de laquelle ces forces seroient dirigées.* ‡ *Quel est ce raport lorsque ces forces sont dirigées par le foyer extérieur de l'hyperbole.*

du corps L, eſt le foyer extérieur de l'hyperbole; alors cette Courbe aiant $bdy = dx\sqrt{4yy-4ay-bb}$ pour ſon équation à ce foyer, on trouvera de même pour elle $f = \frac{-apb}{yy-ay} = \frac{apb}{ay-yy}$, laquelle formule ſemble la même que celle qu'on vient de trouver pour l'Ellipſe dans l'art. 34. *Mais celle-ci aiant $y > a$, elle doit être négative; au lieu que l'autre eſt poſitive: Auſſi les forces centrales ſont-elles ici centripetes de centrifuges qu'elles étoient-là & dans le précédent art. 36. où elles tendent ſuivant des directions qui paſſent par des foyers intérieurs.

† XXXVIII. Dans les articles 34. & 36. ſi l'on ſuppoſe l'autre foyer infiniment éloigné; alors a devenant infinie, toutes ces formules ſe réduiront à $f = \frac{apb}{ay} = \frac{pb}{y}$ pour la Parabole; ce qui donnera $f.p::b.y.$ pour cette Courbe, c'eſt-à-dire que les forces centrales d'un corps qui décrit une Parabole en tendant toujours ſuivant des directions qui paſſent toutes par ſon foyer, ſont à la peſanteur abſolue de ce même corps, comme les hauteurs déterminatrices des viteſſes de ce corps en différens points de cette Courbe, ſont aux diſtances où il ſe trouve alors du foyer de cette même Parabole.

* EXEMPLE IV.

* Pag. 209. in 4.

‡ XXXIX. Soit MLN un cercle décrit par le

† *Quel eſt auſſi ce raport ſur la parabole lorſque les forces centrales ſont dirigées par ſon foyer.*

‡ *Raport général des forces centrales aux peſanteurs des corps ſur un cercle par quelque point du plan de ce cercle que ces forces ſoient dirigées.* FIG. IX. X.

le corps L mû encore comme l'on voudra en tendant toujours suivant des directions LC qui passent toutes par quelque point C pris à discrétion sur le plan de ce cercle dont le centre soit F. Par ce point C soit le diamétre MN avec les lignes de direction CL, Cl, indéfiniment proches l'une de l'autre ; soit aussi l'arc LD décrit du centre C, avec FG perpendiculaire sur CL. Soient enfin $CF = c$ & $FL = r$ constantes, outre $CL = y$, $LD = dx$, & $Ll = ds$, comme ci dessus art. 9. & 28.

Cela posé, l'on aura $Ll\ (ds).\ LD\ (dx) :: FL\ (r).\ LG = \frac{rdx}{ds}$. Et $Ll\ (ds).\ lD\ (dy) :: Fl\ (r).$ $FG = \frac{rdy}{ds}$. Donc $CG \left(\sqrt{\overline{FC}^2 - \overline{FG}^2}\right) = \sqrt{cc - \frac{rrdy^2}{ds^2}}$. Donc aussi $CL\ (y) = \frac{rdx}{ds} + \frac{\sqrt{ccds^2 - rrdy^2}}{ds}$, ou $yds - rdx = \sqrt{ccds^2 - rrdy^2}$; & en quarrant, $yyds^2 - 2rydxds = ccds^2 - rrdy^2 - rrdx^2 = ccds^2 - rrds^2$, ou $2rydx = \overline{yy + rr - cc} \times ds$ (soit $2nn = yy + rr - cc$) $= 2nnds$, ou bien encore $\frac{rryydx^2}{n^4} = ds^2 = dx^2 + dy^2$: ce qui donne aussi $\frac{rryy - y^4}{n^4} \times dx^2 = dy^2$, ou $dy = \frac{dx\sqrt{rryy - n^4}}{nn}$. Donc en faisant dx constante, l'on aura pour lors

$$ddy = \frac{\frac{rrnnydxdy - 2n^5dxdn}{\sqrt{rryy - n^4}} - 2ndxdn\sqrt{rryy - n^4}}{\quad} =$$

$$= \frac{rrnnydxdy - 2n^5dxdn - 2rryyndxdn + 2n^5dxdn}{n^4\sqrt{rryy - n^4}} =$$

$= \frac{rrnny\,dx\,dy - 2rryyn\,dx\,dn}{n^4\sqrt{rryy-n^4}}$. Mais puisque (*hyp.*) $nn = \frac{yy+rr-cc}{2}$, l'on aura $ndn = ydy$. Donc aussi l'on aura $ddy = \frac{rrnny\,dx\,dy^2 - rry^3\,dx\,dy}{n^4\sqrt{rryy-n^4}}$ (à cause de $dy = \frac{dx\sqrt{rryy-n^4}}{nn}$) $= \frac{rrnnydx^2 - rry^3dx^2}{n^6}$, outre $ds^2 = \frac{rryydx^2}{n^4}$. Par conséquent la présente hypothêse de dx constante, donnant aussi (*art.* 29. *nomb.* 1.) $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2pb$, l'on aura enfin $f = \frac{nnrryydx^2 - nnrryydx^2 + rry^4dx^2}{nnrry^3dx^2} \times 2pb = \frac{2ypb}{nn}$ (à cause de * $nn = \frac{yy+rr-cc}{2}$) $= \frac{4ypb}{yy+rr-cc}$, ou $f.p::b.\frac{yy+rr-cc}{4y}$. c'est-à-dire (*art.* 4.) que la force centrale du corps L suivant LC, sera toujours à sa pesanteur absolue, en quelque point L de la circonférence circulaire MLN que ce corps se trouve, comme la hauteur d'où il acquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point L, seroit à la fraction $\frac{yy+rr-cc}{4y}$ dont les y (CL) passeroient par ce même point L.

* Pag. 210. in 4.

† XL. On voit delà que si le centre C des Forces (f) étoit en F au centre de ce cercle; alors aiant $c=o$, & $y=r$, la derniere Analogie du précédent art. 39. se changeroit en $f.p::b.\frac{2rr}{4r}::b.\frac{1}{2}r$. c'est,

† *Nouvelle preuve des art.* 26, 27, 32 & 33.

c'est-à-dire que les forces centrales du corps L tendantes alors suivant LF, seroient à sa pesanteur en chaque point L de la circonférence circulaire qu'il décriroit, comme la hauteur d'où il acquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point, seroit à la moitié du rayon de ce cercle, ainsi qu'on l'a déja trouvé dans les art. 26. 32. & 35.

† XLI. Mais si le centre C des Forces (f) étoit à l'extrémité M du diamétre de ce même cercle; aiant alors $c=r$, ou $rr-cc=0$, il suit de même de la derniére Analogie de l'art. 39. que ces forces centrales (f) tendantes alors en M, seroient à la pesanteur (p) du corps L en chaque point L de la circonference qu'on le suppose décrire :: $b.\frac{1}{4}y$. c'est-à-dire, comme la hauteur d'où il acquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point, seroit au quart de sa distance (CL) au centre ou foyer C des forces alors en M.

‡ XLII. Si présentement on suppose que le centre C des Forces (f) soit hors du cercle, comme dans la Fig. 10. Alors aiant $rr-cc$ (*art.* 39) $=FM\times FM-FC\times FC=-NC\times NC\times NC=$ $=-LC\times\lambda C$, & $yy=LC\times LC$, ou $yy=\lambda C\times\lambda C$; la derniére Analogie de l'art. 39. se changera ici en $f.\ p::b.\ \frac{LC\times LC-LC\times\lambda C}{4LC}::b.\ \frac{LC-\lambda C}{4}::b.\ \frac{1}{4}L\lambda::b.\ \frac{1}{2}LG$. depuis N de part & d'autre jusqu'aux point L ou CL. & $C\lambda$ devien-

† *Raport des pesanteurs aux forces centrales pour le cas où le centre de ces forces seroit un point quelconque de la circonférence de ce cercle.*

‡ *Quel seroit ce raport si le centre de ces forces étoit hors la circonférence de ce cercle sur son axe.* FIG. X.

viennent touchantes du cercle en question; Et en * $f. p :: b. \frac{\lambda C \times \lambda C - LC \times \lambda C}{4\lambda C} :: b. \frac{\lambda C - LC}{4} :: b. - \frac{1}{2} L\lambda :: b. - \frac{1}{2} LG.$ depuis *M.* de part & d'autre jusqu'aux mêmes points d'attouchement.

* Pag. 211. in 4.

† XLIII. D'où l'on voit que lorsque le corps *L* sera en *N* ou en *M*, c'est-à-dire aux extrémitez du diamétre *MN* qui passe par le centre *C* des forces (f) de ce corps, l'on aura $f. p :: b. \pm \frac{1}{2} NF$ ($\pm \frac{1}{2} r$). sçavoir en $N :: b. + \frac{1}{2} r.$ Et en $M :: b. - \frac{1}{2} r.$ c'est-à-dire de part & d'autre, $f. p :: b. \frac{1}{2} r.$ par raport au centre *F* du cercle *MLN*, comme si le centre *C* des Forces (f) étoit en ce centre *F*, ainsi qu'on l'a trouvé pour ce cas ci dans les art. 26. 32. 35. & 40.

‡ XLIV. Il suit aussi de l'art. 39. que ces forces centrales (qui sont centrifuges depuis *N* de part & d'autre jusqu'aux points d'attouchement *T*, & centripetes depuis *M* aussi de part & d'autre jusqu'à ces mêmes points d'attouchement) doivent être infinies en l'un & en l'autre de ces points *T* par raport à la pesanteur du corps où elles se trouvent; parce que $L\lambda$ ou LG devenant nulles en ces mêmes points, l'Analogie $f. p :: b. \pm \frac{1}{2} LG.$ commune (*art.* 42.) à ces deux cas, se changera-là en $f. p :: b. o.$ sans que b cesse d'être réelle, le mouvement du corps *L* étant supposé se continuer toujours en ces points d'attouchement. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 22. nomb. 1. où cela se voit convenir à toutes sortes de Courbes.

C'est-là un Paradoxe qu'on va voir expliqué dans

† *Nouvelle preuve encore des art.* 26, 27, 32, 35. & 40.

‡ *Cas où les forces centrales seroient infinies sur le cercle.*

dans un éclaircissement particulier. On y verra aussi que quelque changement qu'il arrive en chacun de ces points d'attouchement T *aux forces centrales* (f) *du corps* L, *en devenant centripetes ou centrifuges, de centrifuges ou centripetes qu'elles étoient jusqu'en ce point ; ce corps ne sçauroit continuer sa route suivant* NTM, *ou* MTN, *c'est-à-dire, décrire seulement le demi-cercle* NTM, *tant que le centre* C *de ses forces centrales se trouvera hors ce demi-cercle. Mais auparavant il est bon de faire les Remarques suivantes.*

* REMARQUE I.

* Pag. 212. in 4.

Sur l'étendue des trois derniers articles 42. 43. & 44.

† XLV. Il est premiérement à remarquer que ces trois derniers Corollaires ou art. 42. 43. & 44. sont encore vrais dans le cas où le centre C des Forces est infiniment éloigné, sa distance n'y étant point déterminée. Ce qui a été démontré de ces forces pour ce cas dans les Mém. de 1700. pag. 390. ‡ Corol. 2. du Prob. 6. prouve aussi qu'elles doivent être infinies dans les points où les touchantes tirées de leur centre C, rencontrent le cercle en question. La même chose se démontrera encore par raport à toute autre Courbe dans les points où elle seroit rencontrée par des touchantes tirées d'un pareil centre de forces. La formule $f = \frac{-ddy}{ds^2} \times 2ph$, qui dans ce cas particulier du centre C des for-

M 4 ces

† *Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps dans le cas où les directions de ces forces seroient paralleles entr'elles.*

‡ Et pag. 334. dans la Nouv. Ed.

ces (f) infiniment éloigné, résulteroit de celle ($f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$) dont on vient de se servir dans l'art. 39. donneroit aussi la même chose en se servant d'équations dont les ordonnées (appellées aussi y, quoiques finies) suivant lesquelles tendroit le corps *décrivant*, seroient paralleles entr'elles, & terminées à un axe dont les élémens seroient dx.

† Par exemple, en se servant de l'équation $yy = \frac{abx \mp bxx}{a}$ commune à toutes les Sections coniques, cette nouvelle formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$ (en faisant dx constante) donnera en général $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + y \times \overline{ab \mp 2bx}^2}$ pour toutes les Sections coniques : c'est-à-dire,

1°. $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + y \times \overline{ab + 2bx}^2}$ pour l'Hyperbole;

2°. $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + y \times \overline{ab - 2bx}^2}$ pour l'Ellipse;

3°. $f = \frac{2aaph}{4y^3 + y \times \overline{a - 2x}^2}$ pour le Cercle en faisant $b = a$;

4°. $f = \frac{2bbph}{4y^3 + bby}$ pour la Parabole en prenant a infini.

* Pag. 243. in 4. * Ce qui donne (dis-je) encore par tout là, $f = \frac{2aabbph}{0}$ (en prenant $x = 0$ & $y = 0$), c'est-à-

dire

† *Application de la précédente Regle à toutes les Sections coniques.*

dire les forces centrales (f) infinies dans les points d'attouchement des touchantes paralleles aux ordonnées (y), ou aux directions de ces forces. Et ainsi d'une infinité d'autres Courbes ausquelles on pourroit appliquer de même la formule $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$. Mais l'usage de cette formule d'ordonnées paralleles, de même que celui de toutes les autres formules que l'art. 29. fournit encore, & que les autres Regles de l'art. 28. pourroient fournir aussi à l'infini pour les ordonnées concourantes, & ensuite pour les ordonnées paralleles par la supposition de y infinie, étant le même que celui qu'on vient de faire de $f = \frac{ds^2 - yddy}{yds^2} \times 2ph$, l'on ne s'y arrêtera pas davantage.

REMARQUE II.

Sur le raport de la Pesanteur aux forces centrales dont le foyer ou centre est différent de celui des ordonnées de la Courbe en question.

† XLVI. Il est aussi à remarquer que si le centre des Forces, tant centrifuges que centripetes, du corps qui décrit une Courbe quelconque, étoit différent du centre des ordonnées de cette Courbe sur le plan de laquelle il fût; la formule $f = \frac{4phxPt}{ds^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. fourniroit

M 5

† *Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps qui décriroient des Courbes dont le centre des ordonnées seroit différent de celui de ces forces, en considérant les élémens des Courbes comme Courbes aux mêmes.* Theor. I.

roit encore des Regles plus générales que celles de l'art. 28. puisqu'en confondant ces deux centres en un, les Regles de cet art. 28. deviendroient autant de Corollaires de celles-là.

Pour le voir, soit encore la Courbe *MLN* telle qu'on voudra, décrite par un corps *L* dont les forces centrales (*f*) soient toutes dirigées par *F* suivant *LF*, pendant que les ordonnées *LC* de cette Courbe continuent de s'assembler en *C*. Soient aussi $Ll = ds$, les élémens de cette même Courbe; *CL* ou $Cl = y$, ses ordonnées; $LD = dx$, perpendiculaire sur *Cl*, & qui prolongée rencontre *Fl** en *A*; laquelle *Fl* rencontre aussi en *K* la tangente *LQ*, que *Cl* prolongée rencontre pareillement en *S*. Soient de plus *FL* ou $Fl = q$, les rayons des forces (*f*). Soient enfin *lO*, *lP*, paralleles à *LD*, *LF*; & du diamétre *CF*, le cercle *CBF* que *CL*, *Cl*, rencontrent en *B*, *b*; & dont *CB* ou $Cb = m$, *FB* ou $Fb = n$, sont les cordes.

*Pag. 214 in 4.

Cela fait, les triangles (*constr.*) semblables *Fbl*, *ADl*, donneront *bl* $(y-m)$. *Fl* (q) :: *Dl*. (dy). *Al* ou $AK = \frac{q\,dy}{y-m}$. Et *bl* $(y-m)$. *Fb* (n) :: *Dl* (dy). $AD = \frac{n\,dy}{y-m}$. Ce qui donne $AL = dx + \frac{n\,dy}{y-m} = \frac{y\,dx - m\,dx + n\,dy}{y-m}$. Mais les triangles (*hyp.*) semblables *KAL*, *KlO*, donnent aussi *AK* $\left(\frac{q\,dy}{y-m}\right)$. *AL* $\left(\frac{y\,dx - m\,dx + n\,dy}{y-m}\right)$ :: *lK*. $lO = \frac{y\,dx - m\,dx + n\,dy}{q\,dy} \times lK$. De plus les triangles (*hyp.*) semblables *SDL*, *SlO*, donnent pareillement *SD* ou *lD* (dy). *DL* (dx) :: *Sl*. *lO*

$IO = \frac{dx}{dy} \times SI$. Donc $\frac{dx}{dy} \times SI = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdy} \times IK$; & par conséquent aussi $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times lK$.

Or en considérant l'élément Ll de la Courbe proposée, non comme un côté droit de polygone rectiligne, mais comme un véritable arc de cercle, on a aussi trouvé ci-dessus (*art.* 13.) $Sl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura ici $\frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl = \frac{ds^3}{2rdx}$; & par conséquent $Kl = \frac{qds^3}{2r \times ydx - mdx + ndy}$. Mais on vient de supposer, $q = LF = \sqrt{\overline{LB}^2 + \overline{FB}^2} = \sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}$. Donc $Kl = \frac{ds^3}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Or les triangles (*constr.*) semblables KlP, KFL, donnant $Pl. lK :: LF. FK$. Et l'angle LFK (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$, l'on aura de même $Pl = Kl$. Donc $Pl = \frac{ds^3}{2r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Donc aussi en substituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{t\,ds^2}$ des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura enfin $f = \frac{2pbds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ pour une Regle infiniment générale de comparaison des pesanteurs des corps avec leurs forces centrales, dont le centre se- * Pag 215 in 4.

 roit

roit tout autre que celui des ordonnées de la Courbe qu'il décrit. *Ce qu'il falloit trouver.*

† XLVII. Si présentement on suppose que le centre de ces forces centrales devienne le même que celui des ordonnées de la Courbe en question, c'est-à-dire que ces forces tendent toutes suivant ces mêmes ordonnées; ces centres *C* & *F* alors confondus en un seul & même point, rendant par-là *CB* (m) & *FB* (n) nulles, c'est-à-dire $m = o = n$, la précédente Regle générale

$$f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$$ de l'art. 46. se changera pour lors en $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{yy}}{ydx} = \frac{2phds}{rdx}$, qui est celle qu'on a déja trouvée pour ce cas-ci dans les art. 9, 14, & 18.

‡ XLVIII. La Regle du centre des forces différent de celui des ordonnées de la Courbe en question, qu'on vient de trouver dans l'art. 46. en considérant les élémens de cette Courbe comme Courbes eux-mêmes, se peut encore trouver en les considérant comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits du polygone infiniti-latere rectiligne sous la forme duquel cette Courbe se peut aussi considérer.

Pour cela, supposons présentement *LQ* en ligne droite avec le petit côté *ZL* de ce polygone *MLN*, qui prolongé vers *Q*, fera ici une nouvelle tangente *LQ* suivant laquelle la vitesse de

† *Regles des art. 9, 14. & 19. tirées de la précédente.*

‡ *Autre démonstration de la Regle du penultième art. 46. tirée présentement de la considération des Courbes sous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.*

de rotation en L du corps *décrivant* tendra à l'emporter. Tout le reste demeurant le même par raport à cette nouvelle tangente que ci-dessus (*art.* 46.) par raport à l'autre, on trouvera ici non seulement Pl double de ce qu'elle étoit dans cet art. 46. comme l'on a trouvé dans l'art. 17. Fig. 5. Tl double de Pl; mais encore $LP.$ $Pl::p\times LQ.f\times LP.$ comme l'on a trouvé $LT.$ LG ou $Tl::p\times LT.f\times LT.$ dans l'art. 18. Fig. 5. en supposant encore ici LQ double de la hauteur (b) d'où le corps * tombant aquieroit en L la vitesse qu'il y a suivant LQ, de même qu'on a supposé là LT double de cette même hauteur. Donc on aura pareillement ici $LP.Pl::p\times 2b.$ $f\times LP.$ ou $f=\frac{2pb\times Pl}{LP\times LP}=\frac{2pb\times Pl}{Ll\times Ll}$. * Pag. 216 n 4.

Mais en prenant encore r pour le rayon osculateur de la Courbe MLN en L, on trouvera de plus ici $Sl=\frac{Ll\times Ll\times Ll}{r\times DL}$ de la même maniére qu'on a trouvé $Xl=\frac{Ll\times Ll\times Ll}{RL\times DL}$ dans l'art. 19. Fig. 5. où cette Courbe étoit pareillement considerée sous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne. Donc aiant aussi en général (*art.* 46.) $Sl=\frac{ydx-mdx+ndy}{qdx}\times Kl$, soit que cette Courbe soit considerée sous la forme de polygone ou non, l'on aura pour ici $\frac{ydx-mdx+ndy}{qdx}\times Kl=\frac{Ll\times Ll\times Ll}{r\times DL}$ (en appellant encore Ll, ds; & LD, dx) $=\frac{ds^3}{rdx}$. Et par conséquent $Kl=$

$= \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$. Or les triangles semblables *KIP*, *KPL*, donnant *PI.KI::LF.FK.* Et l'angle *LFK* (*hyp.*) infiniment petit, rendant $LF = FK$; l'on aura de même $PI = KI$. Donc $PI = \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$ (à cause que $q = \sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}$ suivant l'art. 46.) $= \frac{ds^3}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$. Donc aussi en substituant cette valeur de PI dans l'équation $f = \frac{2phxPI}{KI \times LI} = \frac{2phxPI}{ds^2}$ trouvée ci-dessus, la présente hypothése de la Courbe polygone donnera encore la même formule $f = \frac{2ph\,ds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ qui a été trouvée dans l'art. 46. en considérant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

† XLIX. Puisque l'article 46. & ce dernier 48. donnent $f = \frac{2ph\,ds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$, soit que la Courbe *MLN* soit considérée sous la forme de polygone ou non, & que $2p$ est (*hyp.*) une grandeur constante; les forces centrales dont

* Pag. 217. in 4. il * s'agit ici, seront entr'elles dans l'une & dans l'autre de ces deux hypothéses, comme les fractions

† *Regle du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont le centre seroit différent de celui des ordonnées de la Courbe sur laquelle elles se trouvent.*

tions correſpondantes $\frac{bds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$.
Mais les hauteurs (b) d'où le corps *decrivant* devroit tomber pour aquerir les viteſſes qu'il a aux différens points de la Courbe qu'il décrit, étant comme les quarrez de ces viteſſes, c'eſt-à-dire (en prenant v pour le nom de chacune de ces viteſſes, & dt pour celui de chacune des inſtans que le corps *décrivant* employe à parcourir chacun des élémens de la Courbe qu'il décrit) $b = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$; ces mêmes forces ſeront auſſi entr'elles comme les fractions $\frac{ds^3}{rdt^2} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ correſpondantes.

† L. Pour faire uſage de cette expreſſion du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, & de la Regle $f = \frac{2pbds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ de leur raport aux peſanteurs des corps, trouvée ci-deſſus art. 45. & 48. il eſt à remarquer que ces formules en fourniront encore ſix autres toutes auſſi générales pour le même ſujet que chacune d'elles, en y ſubſtituant les ſix valeurs infiniment générales du rayon oſculateur, qui ſe trouvent dans les Mém. de 1701. pag. 33. & 37. art. ‡ 10. & 14. en ſuppoſant pour les trois derniéres l'arc de cercle

† *Maniére de rendre les deux Regles des trois articles précédens* 46, 48, & 49. *facilement applicables à toutes ſortes de Courbes où le centre des ordonnées ſeroit différent de celui des forces centrales*

‡ Et dans la Nouv. Ed. pag. 37 & 47.

cercle *MG* (z) décrit du centre *C*, & de tel rayon *CM* (a) qu'on voudra, ainsi qu'on les a substituées ci-dessus art. 28. dans la formule $f = \frac{2phds}{zdx}$ des art. 9. 14. & 19. pour en tirer les six autres Regles de cet art. 28. Et les six qui résulteront ainsi de l'expression $\frac{ds^3}{rdt^2} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ qu'on vient de trouver (*art.* 49.) du raport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, seront précisément les mêmes que les six qui sont aussi pour le même sujet dans les pag. 46. & 47. art. 23. de ces Mém. de 1701. † le signe d'égalité n'y signifiant qu'égalité de raports. Voici donc seulement celles qui résultent de même de la précédente * $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$, où le signe d'égalité signifie égalité de grandeurs, lesquelles sont ici homogenes, au lieu que là elles sont hétérogenes.

* Pag. 218. *lin.* 4.

REGLES DES FORCES CENTRALES

Comparées aux Pesanteurs des corps, plus générales encore que celles de l'article 28.

1°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx - mdx + ndy}$.

2°. $f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ydxds} \times \frac{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}{ydx - mdx + ndy}$.

3°.

† Sec. Edit. pag. 52.

$$3^\circ.\ f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{yds^2} \times \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$4^\circ.\ f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{adyds} \times \frac{2dzdyds + ydsddz - ydzdds}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$5^\circ.\ f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{aydzds} \times \frac{ydsdz^2 + aadydds - aadsddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

$$6^\circ.\ f = \frac{2ph\sqrt{\overline{y-m}^2 + nn}}{ads^2} \times \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydyddz - ydzddy}{ydx - mdx + ndy}.$$

On fera ſur ces nouvelles Regles du raport des forces centrales aux peſanteurs des corps, les mêmes réflexions qui ſe trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 47. & 48. art. 24. ‡ ſur de pareilles Regles du raport de ces forces entr'elles. En voici ſeulement deux exemples pour en faire l'uſage.

* EXEMPLE I.

† LI. Suppoſons, ſi l'on veut, que la Courbe propoſée *MLN* ſoit un cercle dont *F* ſoit le centre, auquel tendent toutes les forces centrales (f) du corps *L* qui le décrit, pendant que les ordonnées *LC*, *lC*, concourent à la circonférence de ce cercle. Alors tout le reſte demeurant le même que dans l'art. 46. Fig. 11. l'égalité des rayons *FC* & *FL* de ce cercle *MLN*, & *FB* perpendiculaire ſur *LC*, donnant BC (m) $= \frac{1}{2}$ *CL* ($\frac{1}{2}y$); & par conſéquent $\overline{y-m}^2$

† *Raport des forces centrales à la peſanteur d'un corps qui décriroit un cercle dont les ordonnées auroient leur centre à ſa circonférence pendant que ces forces auroient le leur au centre même de ce cercle.* FIG. XII.

‡ Sec. Edit. pag. 53.

* Pag. 219. in 4. $\overset{*}{y} - m^2 = \frac{1}{4}yy$; & delà $nn = rr - \frac{1}{4}yy$, ou $4nn = 4rr - yy$, en prenant r pour le nom du rayon FC de ce cercle MLN: la premiére des Regles du précédent art. 50. se changera ici en $f = \frac{-4rpb}{ydyds} \times \frac{-dxdyds + ydsddx - ydxdds}{\frac{1}{2}ydx + ndy} =$ $= \frac{4rpb}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx + 2ndy}$. Et si l'on suppose dx constante, c'est-à-dire $ddx = 0$, cette Regle se changera même ici en $f = \frac{4rpb}{ydyds} \times \frac{dxdyds - ydxdds}{ydx + 2ndy}$ (à cause que cette hypothêse de dx constante, donne aussi $dds = \frac{dyddy}{ds}$) $= \frac{4rpb}{ydyds^2} \times \frac{dxdyds^2 - ydxdyddy}{ydx^2 + 2ndy} = \frac{4rpb}{ydx^2 + ydy^2} \times \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{ydx + 2ndy}$.

Mais la ressemblance des triangles LCD, BCE, donnera aussi $BC\ (\frac{1}{2}y).\ LC(y) :: EB(dn).\ LD\ (dx) = 2dn$ ($nn = rr - \frac{1}{4}yy$ donnant $dn = \frac{ydy}{4\sqrt{rr - \frac{1}{4}yy}} = \frac{ydy}{4n}$ positif, à cause que n & y croissent alternativement) $= \frac{ydy}{2n}$. Ce qui dans la présente hypothêse de dx constante, donne aussi $ddx\ (0) = \frac{nyddy + ndy^2 + ydndy}{2nn}$, dont le dernier terme du numerateur est positif à cause de ces mêmes accroissemens alternatifs de n & de y; d'où résulte $ddy = \frac{-ndy^2 - ydndy}{ny}$ (à cause de

$dn =$

$dn = \frac{ydy}{4n}) = \frac{-4nndy^2 - yydy^2}{4nny}$ (à cause de $4nn = 4rr - yy$) $= \frac{-4rrdy^2}{4nny} = -\frac{rrdy^2}{nny}$.

Donc en substituant ces valeurs de dx & de ddy dans la précédente équation $f = \frac{4rph}{ydx^2 + ydy^2} \times \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{ydx + 2ndy}$, il en résultera $f = \frac{4rph}{y^3 + 4nny} \times \frac{y^3 + 4nny + 4rry}{yy + 4nn}$ (à cause de $4nn = 4rr - yy$) $= \frac{4rph}{4rry} \times \frac{4rry + 4rry}{4rr} = \frac{ph}{r} \times 2 = \frac{2ph}{r}$; ce qui donne ici $f. p : : h. \frac{1}{2} r$. comme dans les art. 26, 32, 35, 40, & 43.

† LII. La même chose se peut encore trouver autrement sans rien supposer ici de constant que les rayons du cercle MLN. En effet aiant trouvé ci-dessus (*art.* 51.) * $f = \frac{4rph}{ydyds} \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydx + 2ndy}$, dont du, dy, ds, sont toutes variables; Et les Mém. de 1701. pag. 35. art. 10. nombre 1. ‡ donnant alors $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, ou $\frac{r}{ydyds} = \frac{ds}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$, à cause que le rayon du cercle est celui de sa Dévelopée, laquelle se confond toute en son centre: la substitution du second membre de cette égalité pour le premier dans la précédente valeur de f, donnera $f = \frac{4phds}{ydx + 2ndy}$.

* Pag. 220. in 4.

Or

† *Autre maniére de démontrer le même raport.*

‡ Et dans la Nouv. Ed. pag. 40.

Or les triangles semblables Fbl, lDL, donnent Ll (ds.) Dl (dy) :: Fl (r). Fb (n) $= \frac{rdy}{ds}$. Donc en substituant cette valeur de n dans l'égalité précédente, l'on aura $f = \frac{4phds^2}{ydxds + 2rdy^2}$.

Mais les mêmes triangles Fbl, lDL, donnent aussi bl ($\frac{1}{2}y$). Fl (r) :: LD (dx). Ll (ds) $= \frac{2rdx}{y}$. Donc en substituant cette même valeur de ds dans le diviseur de la derniere valeur de f, l'on aura enfin $f = \frac{4phds^2}{2rdx^2 + 2rdy^2} = \frac{2ph}{r}$. Ce qui donne encore f. p :: h. $\frac{1}{2}r$. Ainsi qu'on le vient de trouver dans le précédent art. 51. conformément aux art. 26, 32, 35, 40, & 43.

EXEMPLE II.

† LIII. Si l'on veut que la Courbe proposée MLN soit encore un cercle, mais qui ait présentement le centre C des ordonnées LC, & le centre F des forces du corps *décrivant*, aux extrémitez d'un de ses diamétres; & que par conséquent elle se confonde ici avec le demi-cercle CBF. Alors cette Courbe aiant CB (m) $= CL$ (y), ou $y - m = o$, la prémiére des Regles infiniment générales trouvées dans l'art. 50. se changera ici en $f = \frac{2npb}{ydyds} \times$ $dxdyds$

† FIG. XIII. *Quel seroit ce raport dans le cas où le centre des forces, & celui des ordonnées du cercle en question, seroient aux deux extrémitez d'un même diamétre de ce cercle.*

$\frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ndy} = 2pb \times \frac{dxdyds + ydsddx - ydxdds}{ydy^2 ds}$.

Et si l'on suppose dx constant, & par conséquent $dds = \frac{dyddy}{ds}$, elle se changera même en

* $f = 2pb \times \frac{dxdyds^2 - ydxdyddy}{ydy^2 ds^2} = 2pb \times \frac{dxds^2 - ydxddy}{ydyds^2}$. * Pag. 221. in 4.

Mais si l'on prend $2r$ pour le nom du diamétre CF, l'on aura ici $4rr - yy = nn$, ou $\sqrt{4rr - yy} = n$; ce qui donne $\frac{-ydy}{\sqrt{4rr-yy}} \left(\frac{-ydy}{n}\right) = -dn = -dx$ négatif, à cause que n & y croissent alternativement, & que EB (dn) se confond ici avec DL (dx). Et pour cette même raison l'équation résultante $ydy = n\,dx$ donnera aussi $y\,ddy + dy^2 = -dndx = -dx^2$ négatif encore pour la même raison, & sans $n\,ddn$ à cause de dx (*hyp.*) constante; d'où résulte enfin $y\,ddy = -dx^2 - dy^2 = -ds^2$.

Donc en substituant cette valeur de $y\,ddy$ dans la derniére équation $f = 2pb \times \frac{dxds^2 - ydxddy}{ydyds^2}$, l'on aura $f = 2pb \times \frac{dxds^2 + dxds^2}{ydyds^2} = 2pb \times \frac{2dx}{ydy}$ (à cause de $dx = \frac{ydy}{n}$) $= 2pb \times \frac{2ydy}{nydy} = \frac{4pb}{n}$. D'où résulte $f. p :: b. \frac{1}{4}n$. conformément à l'art. 41.

REMARQUE III.

Sur le raport de la Pesanteur aux Forces centrales de differens foyers ou centres.

† LIV. Il est aussi à remarquer que quoique jus-

† *Regle de comparaison des forces centrales, dirigées par plusieurs centrales ou foyers, avec la pesanteur du corps où elles se trouveroient.*

jusqu'ici nous n'aions consideré à chaque point de la Courbe en question, qu'une seule force centrale dans le corps qui la décrit, la comparaison que nous en avons faite avec la pesanteur de ce corps, se pourra faire de même avec autant d'autres forces centrales qu'on lui en voudra supposer à la fois à chaque point de cette Courbe, par le concours desquelles il l'auroit décrite, en donnant le raport de ces forces entr'elles de chaque foyer aux autres ; & cela de la même maniére que les Regles que nous avons données de ces forces en 1701. nous ont conduit à celles que nous avons données de ces forces concourantes en 1703.

† Pour le voir, soit encore une Courbe quelconque *MLN*, mais décrite présentement à la maniére de M. *Tschirnhaus*, par le corps *L* mû suivant *LN* par le concours * de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agissent toutes à la fois sur lui suivant des lignes qui passent par leurs foyers ou centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placez d'abord comme l'on voudra dans le plan de cette Courbe. Soit *IL*℈ la tangente de cette même Courbe en tel point *L* qu'on voudra, avec l'arc *Ll* infiniment petit, par les extrémitez duquel soient tirées des centres ou foyers *A*, *B*, *C*, &c. les droites *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *CL*, *Cl*, &c. dont *Bl*, *Cl*, prolongées rencontrent la tangente *L*℈ en *V*, *S*. Soient aussi *lK*, *LG*, *LD*, perpendiculaires sur *AL*, *Bl*, *Cl*, & dont la premiére *Kl* prolongée du côté de *l*, rencontre en *O* la tangente *L*℈, sur laquelle soient pareillement *IF*, *KT*, *GY*, *DX*, perpendiculaires en *F*, *T*, *Y*, *X*. Soient de plus *RL*, *Rl*, deux des rayons osculateurs de la Cour-

* Pag. 222. in 4.

† FIG. XIV.

Courbe *MLN*, dont le second prolongé du côté de *l*, rencontre aussi en *E* la tangente *LQ*. Soient. *A*, *B*, *C*, &c. les noms des forces centrales dirigées suivant les droites *LA*, *LB*, *LC*, &c. qui passent par les foyers ou centres fixes *A*, *B*, *C*, &c.

Cela fait, les triangles rectangles semblables *LKO*, *LTK*, donneront *OL* ou *Ll*. *OK* ou *Kl*: *LK*. *TK* : : *A*. $\frac{A \times Kl}{Ll}$ effort de la force *A* sur le corps *L* suivant *TK* perpendiculaire (*hyp.*) à *LQ*. Les triangles rectangles semblables *LGV*, *GYV*, donneront pareillement *VL* ou *Ll*. *LG* : : *VG*. *YG* : : *B*. $\frac{B \times LG}{Ll}$ effort de la force *B* sur le même corps *L* suivant *YG* perpendiculaire (*hyp.*) à *LQ*. De même encore les triangles rectangles semblables *LDS*. *DXS*, donneront aussi *SL* ou *Ll*. *DL*. : : *SD*. *XD* : : *C*. $\frac{C \times DL}{Ll}$ effort de la force *C* sur le même corps *L* suivant *XD* perpendiculaire encore (*hyp.*) à *LQ*. On trouvera de même les efforts perpendiculaires à *LQ* de tant d'autres forces centrales qu'on voudra supposer agir aussi sur le corps *L*. Donc en retranchant ce que ce corps reçoit ainsi d'impression vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe *MLN*, perpendiculairement à *LQ*, & en * supposant que *B* est de la première espece, & *A*, *C*, de la seconde, l'on aura ici $\frac{A \times Kl}{Ll} + \frac{C \times DL}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces lui donnent ensemble

* Pag. 223. in 4.

ble d'effort ou d'impression perpendiculaire à $L\mathcal{Q}$ vers le dedans de cette Courbe dans l'instant qu'il parcourt l'élément Ll, en vertu duquel effort il est attiré de la tangente $L\mathcal{Q}$ sur cette même Courbe de la valeur de Fl, aussi perpendiculaire (*hyp.*) à cette tangente, pendant le même instant.

Cela étant, si l'on prend HL pour la hauteur d'où ce corps tombant en vertu de sa seule pesanteur, aquieroit en L une vitesse égale à celle qu'il a effectivement suivant Ll; il est visible que le tems de cette chute de H en L, seroit au tems que ce même corps met à parcourir $Ll :: 2HL. Ll.$ puisque cette vitesse demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de HL dans le tems de cette chute; & qu'à vitesses égales les espaces sont comme les tems emploiez à les parcourir. Donc en appellant dt l'instant que ce corps emploie à parcourir Ll, l'on aura $\frac{2HL \times dt}{Ll}$ pour le tems de sa chute faite de H en L en vertu de sa seule pesanteur (p). Par conséquent les espaces parcourus par un même corps en vertu de forces constantes & continuellement appliquées, telles qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur, & que toute force centrale l'est à chaque instant, étant (*art.* 10.) en raison composée de ces forces & des quarrez des tems emploiez à les parcourir, l'on aura ici $Fl. HL :: \frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG + \&c.}{Ll} \times dt^2. \, p \times \frac{4HL \times HL \times dt^2}{Ll \times Ll}$. Ce qui donnera $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c. = \frac{4p \times HL \times Fl}{Ll}$.

* LV.

† LV. Mais en regardant (ainsi que l'on vient de faire) Fl comme parcourue d'un mouvement accéléré pendant le tems que LF est parcourue d'un mouvement uniforme, l'élément Ll décrit par le concours de ces deux mouvemens,* doit être ici regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit ; & par conséquent comme un véritable arc de cercle dont R seroit le centre, & non comme un côté droit de polygone. Ce qui donnera $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$ comme dans l'art. 9. De sorte que les triangles (*constr.*) rectangles & semblables EFl, ELR, donnant $Fl. El : : LR. ER$. Et l'élément Ll rendant $LR = ER$, l'on aura ici $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$. Donc en substituant cette valeur de Fl dans la formule par où finit le précédent art. 54. l'on aura enfin $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2p \times HL \times Ll}{LR}$. Et par conséquent en appellant encore HL, h ; LR, r ; & Ll, ds ; l'on aura de même $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm$ &c. $= \frac{2phds}{r}$ pour une Regle générale de comparaison de la pesanteur d'un corps avec tout ce qu'on lui peut imaginer de forces centrales conspirantes ensemble à lui faire décrire quelque Courbe que ce soit, le rapport de ces forces entr'elles étant donné de chacun de leurs foyers aux autres, comme dans le

* Pag. 224. in 4.

 Mé-

† *Introduction du rayon osculateur dans la précédente Regle, en considérant les élémens des courbes comme courbes eux-mêmes.*

Mémoire du 1. Sept. de 1703. † ces efforts se faisant ici tous suivant le plan de la Courbe *MLN* qu'ils font décrire au corps *L*. Et lorsqu'ils seront dans des plans différens, cette même Regle en fournira encore une autre toute aussi générale pour ce cas, en le faisant revenir à l'autre de la maniére qu'on l'a fait dans ce Mém. du 1. Sept. 1703. Ainsi il n'est pas nécessaire de nous y arrêter davantage, ni d'avertir que le rayon (*r*) de la Dévelopée de la Courbe *MLN* doit ici être pris par raport à tous les foyers *A*, *B*, *C*, &c. Et le reste comme dans ce Mémoire.

‡ LVI. Si l'on compare cette Analyse avec celle des art. 5. & 9. on verra qu'elle n'en différe presque point. La Regle qu'elle vient de nous donner, pourroit se trouver de même en suivant l'Analyse des art. 2, 3, 4, & 6. Aussi lorsque tous les foyers qu'on y suppose, se réduisent à un sur le plan de la Courbe en question, cette même Regle du précédent * art. 55. se change-t-elle en celle de l'art. 9. conclue de ces articles-là. En effet, si de tous ces foyers il ne restoit que *C*, l'anéantissement des autres *A*, *B*, &c. réduiroit cette Regle à $C \times DL = \frac{2phds}{r}$: De sorte qu'en appellant la force *C*, *f*; & *DL*, *dx*; l'on auroit aussi $fdx = \frac{2phds}{r}$, ou $f = \frac{2phds}{rdx}$, comme dans cet art. 9.

* Pag. 225. in 4.

‡ LVII. La Regle qu'on vient de trouver dans

† *Mém. de* 1703. *pag.* 249. Sec. Edit. pag. 278.

‡ *Regle des art.* 14, 19, & 47. *tirée de la précédente.*

‡ *Autre démonstration de la Regle du pénultiéme art.* 55.

dans l'art. 55. en considérant les élémens des Courbes comme courbes eux-mêmes, se peut encore trouver en les considérant comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits des polygones sous la forme desquels ces Courbes se peuvent aussi considérer.

Pour cela, soit encore une Courbe quelconque *MLN* décrite à la maniére de M. de *Tschirnhaus* par le corps *L* mû suivant *LN* par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agissent toutes à la fois sur lui suivant des directions qui passent par leurs centres fixes *A*, *B*, *C*, &c. placez comme ci-dessus art. 54. Soient présentement *Zl*, *Ll*, deux des côtez infiniment petits de ce polygone infiniti-latere, dont le premier *ZL* prolongé en devienne la tangente sur laquelle je suppose présentement *L*♀, ensorte que *L*♀ soit présentement ce petit côté lui-même prolongé. Soit aussi présentement *lF* un arc de cercle décrit du centre *L* par *l*. Soient encore *LR*, *lR*, les rayons de la Dévelopée de cette Courbe *MLN*. Ensuite après avoir encore fait les droites *AL*, *Al*; *BL*, *Bl*; *CL*, *Cl*; &c. Soient encore aussi *lK*, *LG*, *LD*, &c. des perpendiculaires aux droites *Al*, *Bl*, *Cl*, &c. ou des arcs de cercles décrits des centres *A*, *B*, *C*, &c. Soit présentement *DX*, &c. perpendiculaire au petit côté *Ll* de la Courbe.

Cela fait, les triangles semblables *LDl*, *DXl*, donneront $Ll. DL :: Dl. XD :: Ç. \frac{Ç \times Dl}{Ll}$ effort de la force *C* sur le corps *L* suivant *XD* per-

pen-

5. *tirée présentement de la considération des Courbes sous la forme de polygones infiniti-lateres rectilignes.* Fig. XIV.

pendiculaire (*hyp.*) à Ll. On trouvera de même $\frac{A \times lK}{Ll}$, $\frac{B \times LG}{Ll}$, &c. pour ce que les * forces A, B, &c. font d'efforts perpendiculaires à Ll sur le même corps *décrivant*. Donc en retranchant encore ce que ce corps reçoit ainsi d'impression vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe MLN, perpendiculairement à son petit côté Ll, l'on aura encore ici $\frac{A \times Kl}{Ll} + \frac{C \times LD}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm$ &c. ou $\frac{A \times Kl + C \times LD - B \times GL \pm \&c.}{Ll}$ pour tout ce que ces forces centrales A, B, C, &c. lui donnent ensemble d'effort perpendiculaire à Ll vers le dedans de cette Courbe dans l'instant qu'il en parcourt cet élément Ll, en vertu duquel effort il est encore attiré de la tangente LQ sur cette même Courbe de la valeur de Fl pendant cet instant, laquelle Fl se trouvera ici double de ce qu'elle étoit dans les art. 54. & 55. comme l'on a trouvé Yl double de Pl dans l'art. 17. Fig. 5.

* Pag. 226. in 4.

Si l'on regarde présentement cette force centrale résultante du concours de toutes les autres A, B, C, &c. vers le dedans de la Courbe MLN. comme une force simple suivant Fl perpendiculaire au petit côté Ll de cette Courbe considérée sous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne, ainsi qu'on fait ici; & qu'après avoir encore ici supposé LQ double de HL, on multiplie cette force par lF, & la pesanteur (p) du corps L par LQ: la raison qui a donné LY. LG ou Yl : : $p \times LY$. $f \times LY$. dans l'article 18. Fig. 5. donnera de mê-

même ici $LF.Fl::p \times LQ. \frac{A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c.}{Ll} \times LF$. D'où résultera $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{p \times LQ \times Fl \times Ll}{LF \times LF}$ (à cause de $LQ = 2HL$, & de $LF = Ll$.) $= \frac{2p \times HL \times Fl}{Ll}$.

Mais la Courbe *MLN* considérée (ainsi quelle l'est ici) sous la forme de polygone infinitilatere rectiligne, donne de plus $LR. Ll :: Ll. Fl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$. en prenant encore ici *LR* pour un des rayons de sa Dévelopée. Donc en substituant cette valeur de *Fl* dans la formule ou équation précédente, l'on aura enfin $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{2p \times HL \times Ll}{LR}$ (en supposant encore $HL = h$, * $LR = r$, & $Ll = ds$) $= \frac{2phds}{r}$ pour la Regle cherchée de tant de forces centrales qu'on voudra faire conspirer à la description d'une même Courbe quelconque considérée comme polygone infiniti-latere rectiligne, laquelle Regle on voit être la même que celle qui a été trouvée dans l'art. 55. en considérant cette Courbe comme faite d'élémens courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.* *Pag. 227. in 4.

† LVIII. Puisque les art. 55. & 57. donnent $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{2phds}{r}$, soit qu'on considére la Courbe *MLN* sous la

N 3 for-

† *Régle du raport ou des raports que doivent avoir entr'elles les forces centrales à plusieurs centres ou foyers.*

forme de polygone, ou non; que $2p$ eſt une grandeur conſtante, & que les hauteurs (b) d'où le corps *décrivant* devroit tomber pour acquerir les viteſſes qu'il a aux différens points de la Courbe qu'il décrit, ſont comme les quarrez de ces viteſſes, c'eſt-à-dire (en prenant v pour le nom de chacune de ces viteſſes, & dt pour celui de chacun des inſtans que le corps *décrivant* emploie à parcourir chacun des élémens ds de la Courbe qu'il parcourt) $b = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$, l'on aura

$$A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{ds^3}{rdt^2}$$ pour

l'expreſſion de la raiſon que chacune des forces centrales A, B, C, &c. dont il s'agit ici, doit ſuivre pendant ſa variation par les différens points de la Courbe MLN qu'elles font décrire au corps L par leur concours d'action ſur ce même corps, quel que ſoit le raport (*hyp.*) donné de chacune de ces forces à chacune des autres: Et cette expreſſion eſt préciſément la même que celle que j'ai trouvée pour le même ſujet dans les Mémoires de 1703. pag. 250. art. 2. † Le ſigne d'égalité ne ſignifiant ici, non plus que là, que des égalitez de raports, & non de grandeurs, puiſqu'elles n'y ſont pas homogenes comme dans les articles précédens.

*Pag. 228. in 4.

* REMARQUE. IV.

Touchant les Forces centrales de differens corps ſur une même ou différentes Courbes, ou d'un même corps ſur des Courbes différentes.

‡ LIX. Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les For-

† Sec. Edit. pag. 279.

‡ *Regle de comparaiſon des forces centrales de différens corps ſur une même ou ſur différentes Courves, ou d'un même corps ſur des Courbes différentes.*

Forces centrales que d'un même corps quelconque sur une seule & même Courbe aussi quelconque; voici présentement pour de pareilles forces de différens corps sur une même ou sur différentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes différentes: Voici, dis-je, quelles doivent être aussi les Regles de comparaison de ces derniéres forces entr'elles, & avec les pesanteurs constantes de ces corps. Pour cela soient,

Les Forces centrales . . .	f, F, φ.
de trois corps dont les Masses soient	m, m, μ.
Leurs Pesanteurs	p, π, π.
Elémens des Courbes qu'ils décrivent	ds, $d\sigma$, $d\sigma$.
Vitesses avec lesquelles ils parcourent ces élémens	u, v, υ.
Hauteurs déterminatrices de ces vitesses	h, λ, λ.
Rayons osculateurs de ces Courbes terminez aux élémens précédens	r, ρ, ρ.
Elémens des abscisses de ces mêmes Courbes, tels que *LD* par tout ci-dessus	dx, dx, dx.

Cela posé les articles 9, 14, 18, 47, & 56. donneront $f = \frac{2phds}{rdx}$, & $F = \frac{2\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

Ainsi l'on aura déja $f. F :: \frac{phds}{rdx} . \frac{\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

L'on aura aussi de plus $F. \varphi :: m . \mu$.

Donc on aura aussi $f. \varphi :: \frac{mphds}{rdx} . \frac{\mu\pi\lambda d\sigma}{\rho dx}$.

pour la Regle générale de comparaison cherchée,

 la-

laquelle est aisée à détailler, quelque différens que les raports des masses des corps entr'elles, & de leurs pesanteurs * entr'elles, puissent être supposez lorsque ces corps sont différens, &c. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

* Pag. 223. in 4.

Toutes ces Regles ainsi établies, il ne reste plus (ce me semble) qu'à expliquer le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. En voici l'éclaircissement.

ECLAIRCISSEMENT.

Sur le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

† LX. Ce Paradoxe a raport à une difficulté qui me fût faite au mois de Février ou de Mars de 1701 par M. L. C. D. L. fort habile en ces matieres. Il trouvoit étrange que les forces centrales qu'on vient de voir par tout ci-dessus (à quelques cas près marquez dans l'article 22.) etre finies, ou de même genre que la pesanteur des corps où elles se trouvent, ne leur fissent cependant parcourir que des espaces infiniment petits du second genre, tels que *Pl*, *Kb*, *Tu*, *Fe*, dans les Fig. 1, 2, 3, 4. ci-dessus art. 10. pendant chaque instant qui est un tems infiniment petit du premier genre. Cette force finie, disoit il, doit faire parcourir un espace fini à un corps fini dans un tems fini. Par conséquent elle doit aussi lui faire parcourir un espace infiniment petit du premier genre dans un tems in-

† *Quelque force centrale finie que ce soit, non plus que la pesanteur d'un corps fini quelconque, ne peut par elle-même, c'est-à-dire elle seule, lui faire parcourir qu'un espace infiniment petit du second genre pendant chaque instant, par exemple, pendant le premier instant qu'elle agit sur lui.*

infiniment petit du premier genre, c'est-à dire, dans un instant. Par exemple, ajoûta-t-il, si x est l'espace fini que cette force fait parcourir à ce corps dans le tems fini t, elle devroit aussi lui faire parcourir dx dans l'instant dt; cependant elle ne lui fait parcourir que ddx pendant cet instant: comment concilier cela?

Je lui répondis qu'il en étoit de même de la pesanteur au premier instant de chaque chute; & que cela venoit de ce que si l'on suppose l'une & l'autre de ces deux forces comme la même dans tout le tems t dès son premier instant dt, c'est-à-dire, comme constante & toujours agissante sur ce corps ainsi qu'on le pense d'ordinaire de la pesanteur; les espaces que chacune d'elles lui doit faire parcourir pendant ces tems, doivent être comme les quarrez de ces mêmes tems à commencer dès l'origine de l'un & de l'autre * de ces espaces, c'est-à-dire :: tt. dt^2. *Pag 230. in 4. Mais dt^2 est de même genre que $tddt$; puisque tous les ddt sont entr'eux de même genre, & que celui d'entr'eux qui est troisiéme proportionel à t & à dt, donne $tddt = dt^2$. Donc le genre de l'espace x que cette force fait parcourir (*hyp.*) pendant le tems t au corps sur lequel elle agit, doit être au genre de ce qu'elle lui en doit faire parcourir pendant le premier instant dt de son action sur ce corps, comme le genre de tt est au genre de $tddt$, c'est-à-dire, comme le genre de t est au genre de ddt, ou comme le fini à l'infiniment petit du second genre. Donc x étant (*hyp.*) l'espace fini parcouru dans le tems fini t en vertu de cette force centrale supposée finie & la même pendant tout ce tems t que dans l'instant dt, ou de la pesanteur supposée pareillement finie & con-

ſtante; ddx doit être ce qu'elle en fait parcourir au même corps fini pendant l'inſtant dt. Mais quand ces forces de l'inſtant dt varieroient de quelque maniére que ce fût dans le reſte du tems t, cette variation ne changeant rien à leurs valeurs conſtantes de l'inſtant dt, il eſt viſible qu'elles devroient encore faire faire à ce corps chacune le même eſpace pendant l'inſtant dt, que ſi elles demeuroient conſtantes pendant tout le tems t. Donc quelques variables que les forces centrales ſoient, & quand la peſanteur des corps le ſeroit auſſi, chacune de ces forces ne feroit encore parcourir que ddx pendant le premier inſtant dt de leur action, c'eſt-à-dire, un eſpace infiniment petit du ſecond genre à un corps fini dans un tems infiniment petit du premier genre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

† LXI. La même choſe ſe peut démontrer encore ſans calcul. Car puiſque la force totale réſultante de l'aſſemblage de tout ce que la peſanteur du corps qui tombe, lui en imprime de nouvelle à chaque inſtant de ſa chute dans un tems fini, ne lui fait parcourir qu'un eſpace fini dans ce tems fini, cette même force totale ne lui doit faire parcourir qu'une infinitiéme ou différentielle du premier genre de cet eſpace dans une infinitiéme de ce tems, c'eſt-à-dire, *dans un inſtant. Donc la peſanteur de ce corps n'étant d'elle-même qu'un infinitiéme de cette force totale faite d'une infinité d'accroiſſemens inſtantanez égaux chacun à cette peſanteur, ne doit plus lui faire parcourir par elle ſeule à chaque inſtant qu'une infinitiéme de cette premiére différentielle d'eſpace fini, c'eſt-à-dire, ſeulement une différentio-différentielle ou

*Pag. 231. in 4.

† *Autre démonſtration du précédent art. 59.*

ou une seconde différentielle de cet espace. Par conséquent aussi la force centrale d'un corps à chaque instant pouvant être regardée comme une espece de pesanteur ou de force constante de même genre que la pesanteur de ce corps, elle ne doit non plus lui faire parcourir qu'une différentielle d'espace du second genre pendant cet instant. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

Puisque (art. 60. & 61.) *la pesanteur d'un corps fini, prise comme une force constante à la maniére de* Galilée, *ne peut lui faire parcourir qu'une différentielle (d'espace) du second genre, pendant que sa force de rotation lui en fait parcourir une du premier; il suit nécessairement que sa pesanteur est infiniment petite par raport à sa force de rotation, quoiqu'on regarde aussi d'ordinaire cette force de rotation comme une force finie; mais ce sont deux genres différens de forces finies, comme les lignes, les surfaces, & les corps, sont trois différens genres de grandeurs finies: De même, dis-je, que les corps, les surfaces, & les lignes, sont également appellées des grandeurs finies, quoique les lignes soient infiniment petites par raport aux surfaces, & les surfaces par raport aux corps; De même aussi les forces de rotation, les pesanteurs, & les forces centrales trouvées ci-dessus de même genre que les pesanteurs, sont également regardées comme des forces finies, quoique les deux derniéres soient infiniment petites par raport à la premiére: De sorte que lorsqu'on a dit ci-dessus* (art. 22.) *qu'il y a des cas où les forces centrales se trouvent infinies, on a seulement voulu dire qu'elles se trouvent alors infinies par raport aux pesanteurs, & de même genre que les forces de rotation. C'est ainsi que cela se doit entendre dans tout cet Ecrit.*

† LXII. Des articles 60 & 61. suit nécessairement la * Solution du Paradoxe de l'art. 44. duquel il est ici question. En effet, puisque suivant ces deux derniers art. 60. & 61. une force centrale finie ou de même genre que la pesanteur du corps fini où elle se trouve, ne peut faire parcourir à ce corps qu'un espace infiniment petit du second genre dans un instant, il est manifeste que pour lui en faire parcourir un du premier genre dans ce même instant, cette force devroit être infinie par raport à cette pesanteur; puisque cet espace seroit infini par raport à l'autre, & que les effets sont toujours proportionels aux causes. Or c'est justement ce que font les forces centrales du corps ‡ *L* aux points *T* où les touchantes tirées du centre *C* de ces forces, rencontrent le cercle *MLN* que ce corps est supposé décrire avec telle varieté ou variation de vitesse qu'on voudra: ces forces (dis-je) font parcourir chacune au corps *L* en *T*, un espace infiniment petit du premier genre dans un seul instant.

* Pag. 232. in 4.

Pour le voir soit la secante *CL* infiniment proche de la tangente *CT*, avec deux autres touchantes *LP*, *λπ*, aux points *L*, *λ*, où cette secante rencontre le cercle, lesquelles touchantes rencontrent la premiére *CT* en *P*, *π*.

Cela fait, il est visible que dans l'instant que le corps *L*, venant de *N* en *T*, parcourt l'élément circulaire *LT*, il parcourroit la tangente *LP* s'il n'en étoit point empêché par la force centrale qui dans cet instant le tire vers *C* de la valeur de *PT*; & qu'ainsi *PT* est ce que cette

† *Solution de la premiére partie du paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.*

‡ FIG. XV.

te force lui fait faire alors d'espace pendant cet instant. Or il est visible aussi que *PT*, ici égale à *LP*, est de même genre que *LP* & *LT*. Donc la force centripete. de ce corps vers *C*, lui feroit parcourir alors un infiniment petit du premier genre. Par conséquent suivant le commencement de cet article-ci, cette force doit aussi être pour lors infinie par raport à la pesanteur de ce corps.

On trouvera de même que ce corps allant de *M* en *T*, sa force centrifuge suivant *CL*, doit le repousser de la valeur de *πT* dans l'instant qu'au lieu de parcourir la tangente *λπ*, comme il feroit sans cette force, cette même * force l'oblige de suivre *λT*; & qu'ainsi *πT* étant encore un infiniment petit du premier genre, cette force centrale doit encore être infinie par raport à la pesanteur de ce corps. * Pag. 233. in 4.

Donc de quelque côté *N* ou *M*, que le corps *L* vienne au point d'attouchement *T*, ses forces centrales suivant la touchante *CT*, doivent toujours être infinies par raport à sa pesanteur. Et ainsi des Forces centrales tendantes suivant les touchantes de toute autre Courbe, conformément à l'article 22. & à la premiére partie du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

† LXIII. L'autre partie de ce paradoxe est que quelque changement qu'il arrive en chaque point d'attouchement *T*, aux forces centrales (*f*) du corps *L*, en devenant centrifuges ou centripetes, de centripetes ou de centrifuges qu'elles étoient jusqu'à ce point; ce corps ne sçauroit continuer sa route suivant *NTM* ou *MTN*, c'est-à-dire, décrire seulement le demi-cercle *NTM*, tant que le centre *C* de ses forces

† *Solution de la seconde partie du même paradoxe.*

TX, *TY*, *TZ*, se diversifieront selon les différens raports des Forces centrales du corps qui les décrira. Ce que l'on voit ici du demi-cercle *NTM*, se démontrera de même de toute autre Courbe en pareilles circonstances. *Et c'est tout ce qui restoit ici à faire voir.*

† SOLUTION

Du Problême proposé par M. Jacques Bernoulli *dans les* Actes de Leipsic *du mois de Mai de l'année* 1697. *trouvée en deux maniéres par M.* Jean Bernoulli *son Frere, & communiquée à M.* Leibniz *au mois de Juin* 1698.

SUR LES ISOPERIMETRES.

PROBLEME I.

‡ *DE toutes les Courbes isopérimetres décrites sur un même axe déterminé* BN, *trouver la Courbe* BFN *telle que ses appliquées* FP *élevées à une puissance donnée, ou généralement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées* PZ, *forment ou remplissent un espace* BZN *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formez*

† Cette Solution étoit Latine dans un paquet cacheté, présenté à l'Académie le 1. Fev. 1701. Il n'y fut ouvert que le 17. Avril 1706. & elle n'y fut lue que le 12. Mai suivant: cela pour les raisons qui se voient dans l'Histoire.

‡ FIGURE I.

Fig. 7.

Fig. 10.

Fig. 5

Fig. 8

Fig. 12

16

Fig. 14

mez de la même maniére: ou bien (ce qui revient au même) une Courbe BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *dont les appliquées* FP *prolongées jusqu'en* Z *ensorte que* PZ *soit égale à* GH, *fassent une espace* BZN *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formez de la même maniére & compris par d'autres Courbes quelconques décrites sur* BN *& de même longueur que* BFN.

SOLUTION.

† Que $BF\varphi$ soit une partie de la Courbe cherchée, & que $BZ\zeta$ soit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci* suivant les appliquées de la Courbe donnée *BH*. Je regarde $FO\varphi$ élément de la Courbe $BF\varphi$, comme composé de deux petites lignes droites FO, $O\varphi$; & de même l'élément $ZL\zeta$ de la Courbe $BZ\zeta$, comme composé de deux petites lignes droites ZL & $L\zeta$. Maintenant parceque toute Courbe qui doit donner un *maximum*, conserve aussi dans toutes ses parties les loix de ce même *maximum*, il suit que si des points F & ϕ on mene deux autres petites lignes droites $F\omega$, $\omega\phi$, lesquelles prises ensemble soient égales à $FO + O\phi$, & que de ses lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de FO, $O\varphi$, on a formé ZL, $L\zeta$; il suit, dis-je, que l'espace $ZP\pi\zeta\lambda Z$ doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la position requise des petites lignes FO, $O\varphi$, qui doivent donner ce *maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe $BF\varphi$; je conçois que des foyers

* p. 236. i.

† Fig. II.

mez de la même maniére : ou bien (ce qui revient au même) une Courbe BH, *qui ait pour axe* BG *perpendiculaire à* BN, *étant donnée, déterminer la Courbe* BFN *dont les appliquées* FP *prolongées jusqu'en* Z *ensorte que* PZ *soit égale à* GH, *fassent une espace* BZN *qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formez de la même maniére & compris par d'autres Courbes quelconques décrites sur* BN *& de même longueur que* BFN.

SOLUTION.

† Que $BF\varphi$ soit une partie de la Courbe cherchée, & que $BZ\zeta$ soit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci* suivant les appliquées de la Courbe donnée BH. Je regarde $FO\varphi$ élément de la Courbe $BF\varphi$, comme composé de deux petites lignes droites FO, $O\varphi$; & de même l'élément $ZL\zeta$ de la Courbe $BZ\zeta$, comme composé de deux petites lignes droites ZL & $L\zeta$. Main tenant parceque toute Courbe qui doit donner un *maximum*, conserve aussi dans toutes ses parties les loix de ce même *maximum*, il suit que si des points F & φ on mene deux autres petites lignes droites $F\omega$, $\omega\varphi$, lesquelles prises ensemble soient égales à $FO + O\varphi$, & que de ses lignes on en forme par la même loi $Z\lambda$, $\lambda\zeta$, de même que de FO, $O\varphi$, on a formé ZL, $L\zeta$; il suit, dis-je, que l'espace $ZP\pi\zeta\lambda Z$ doit être plus grand que tout autre $ZP\pi\zeta\lambda Z$. Afin donc de trouver la position requise des petites lignes FO, $O\varphi$, qui doivent donner ce *maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe $BF\varphi$; je conçois que des foyers

* Pa[ge] 236. in

† FIG. II.

foyers F, ϕ, & de la longueur du fil FOp, on ait décrit une petite Ellipse, sur la circonférence de laquelle les deux points O, ω, soient infiniment proches l'un de l'autre, c'est-à-dire dont la distance $O\omega$ soit infiniment plus petite que la distance des foyers F, φ, quoique la droite $F\varphi$ soit déja infiniment petite par elle-même, étant la soûtendante de l'élément $FO\omega\phi$ de la Courbe $BF\phi$. Donc par la nature du *maxim:* les deux espaces $ZP\pi\zeta LZ$ & $ZP\pi\zeta\lambda Z$ seront égaux entr'eux; & en ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il restera le triangle ZLY égal au triangle $\zeta\lambda Y$; ou bien menant les paralleles LO, $\lambda\omega$ (en négligeant les parties infiniment plus petites LYM & $Y\lambda\mu$) le triangle ZLM sera égal au triangle $\zeta\lambda\mu$, c'est-à-dire qu'ayant mené ZC & ζD paralleles à l'axe $B\pi$, comme aussi FI & φK, l'on aura $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. Mais parceque LM est la différence des lignes LR, MR, de méme que $\lambda\mu$ l'est des lignes $\lambda\rho$, $\mu\rho$; & que LR, MR, & $\lambda\rho$, $\mu\varrho$, sont les fonctions des lignes respectives RO, RT, & $\varrho\omega$, $\varrho\theta$; il est clair que LM représentera la différence des fonctions qui sont entre RO, RT; & que $\lambda\mu$ représentera de même la différence des fonctions qui sont entre $\varrho\omega$, $\varrho\theta$. Il faut bien remarquer que la différence des * fonctions de deux lignes comme RO, RT, qui se surpassent d'une quantité TO infiniment petite du second genre, se trouve en différentiant simplement la fonction de RO, & en multipliant par TO ce qui en vient, ayant omis les différentielles: Par exemple, si RL fonction de RO; étoit seulement la puissance n de la même RO, en quoi consiste le cas de mon Frere, c'est-à-dire que si la Courbe BH étoit une

* Pag. 237. in. 4.

une Parabole du dégré n, alors LM ou $\overline{RO}^{n} - \overline{RT}^{n}$ seroit $= n\overline{RO}^{n-1} \times TO$. De même si la Courbe BH étoit un cercle dont le rayon fût $= a$, alors LM ou $\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^2} - \sqrt{2a \times RT - \overline{RT}^2}$ seroit $= \frac{a - RO}{\sqrt{2a \times RO - \overline{RO}^2}} \times TO$; & ainsi des autres. Il faut aussi remarquer qu'en général on exprimera les différences des fonctions de RO, RT, par $\Delta RO \times TO$, en prenant Δ pour le signe ou la caracteristique des différences des fonctions où l'on omet les différences des grandeurs dont elles sont fonctions. Donc ayant déja $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, l'on aura aussi $FI \times \Delta RO \times TO = \varphi K \times \Delta\rho\omega \times \theta\omega$.

Maintenant des centres F & ϕ soient décrits les petits arcs OX, $\omega\xi$, lesquels par la nature de l'Ellipse sont égaux entr'eux. Donc TO est à $\theta\omega$, comme la secante de l'angle XOT ou IFO est à la secante de l'angle $\xi\omega\theta$ ou $K\varphi\omega$. Mais on a aussi $FI . \varphi K :: FO \times$ sin. $FOI . \varphi\omega \times$ sin. $\varphi\omega K$. Donc si à la place de FI, φK, & de TO, $\theta\omega$, on substitue les grandeurs qu'on leur voit ici proportionelles, on aura $FO \times$ sin. $FOI \times \Delta RO \times$ sec. $IFO = \varphi\omega \times$ sin. $\varphi\omega K \times \Delta\rho\omega \times$ sec. $K\varphi\omega$. Or par les loix des sinus, tangentes, & secantes, le rectangle fait du sinus de l'angle FOI par la secante de l'angle IFO, est égal au quarré du sinus total, lequel par les mêmes loix est égal au rectangle fait du sinus de $\varphi\omega K$ par la secante de $K\varphi\omega$. Donc $FO \times \Delta RO = \varphi\omega \times \Delta\rho\omega$; ou si pour RO l'on prend son équivalente PF qui lui est jointe par la petite ligne droite FO, & que pour $\rho\omega$ on prenne de même son équivalente

$\pi\varphi$,

$\pi\varphi$, l'on aura $FO \times \Delta PF = \varphi\omega \times \Delta\pi\varphi$; & par conséquent ΔPF. $\Delta\pi\varphi$ :: $\varphi\omega$ (φO). FO :: sin. $OF\varphi$. sin. $O\varphi F$. Et, *permutando*, ΔPF. sin. $OF\varphi$ :: $\Delta\pi\varphi$. sin. $O\varphi F$. Et parceque* $F\varphi$ est la soûtendante d'un arc infiniment petit $FO\varphi$ de la Courbe $BFO\varphi$; & qu'ainsi on peut regarder chacun des angles $OF\varphi$ & $O\varphi F$ comme la moitié de l'angle de la courbure en F & en φ; il suit que ΔPF est au sinus de la courbure en F, comme $\Delta\pi\varphi$ est au sinus de la courbure en φ, c'est-à-dire en raison constante. Ainsi ce Problême étant ainsi réduit à la pure Analyse, on peut l'énoncer en cette sorte.

*Pag 238. in 4.

Trouver la Courbe BFφ *dont la nature soit telle que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconques* F, *soit à la fonction différentiée de son appliquée respective* PF (*aiant négligé la différence de cette appliquée*) *en raison constante.*

Voici la maniére dont on peut résoudre ce Problême. Soit † BF la Courbe cherchée, dont l'élément (que l'on prend pour constant) soit $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$; soit regardée Fm comme la tangente en $F = Fl$, & par conséquent lFm comme l'angle de la courbure, dont le sinus est lm. Soit enfin le triangle rectangle mnl, dont les côtez mn, nl, soient paralleles aux côtez lC, CF, du triangle FCl; l'on aura $mn = ddx$, & $nl = ddy$. De plus à cause de ces triangles semblables CFl, nml, on aura aussi Cl (dx) Fl (dt) :: nl (ddy). $ml = \frac{dtddy}{dx}$. Mais par la nature de la Courbe, ml est à ΔPF en raison constante. Donc en faisant $\frac{dtddy}{dx}$. Δx :: dt. a. l'on aura cette équation

† FIG. III.

tion $addy = \Delta xxdx$. Mais comme $\Delta xxdx$ est la fonction elle-même differentiée, si l'on intégre, l'on aura la fonction elle-même ou *GH*. Soit donc cette ligne $GH = X$, aiant aussi pris l'intégrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura $ady = X \pm c$; ou bien aiant multiplié les parties homogenes par la constante dt, on aura $ady = Xdt \pm cdt$ (il faut bien rémarquer que j'entends par c une quantité constante & arbitraire, dont il est permis d'augmenter ou de diminuer l'intégrale d'une differentielle quelconque); & en quarrant de part & d'autre l'on aura aussi $aady^2 = dt^2 \times \overline{X \pm c}^2 = dx^2 + dy^2 \times \overline{X \pm c}^2$, d'où l'on tire enfin * $dy = \frac{dx \times \overline{X \pm c}}{\sqrt{aa - \overline{X \pm c}^2}}$, * Pag. 239. in 4. qui sera l'équation générale de la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort simple (il suffit d'en trouver une qui satisfasse) en supposant $c = o$ dans cette équation : car il en résultera $dy = \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$ l'intégrale sera $y = \int \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$, suivant laquelle si l'on construit une Courbe, je dis qu'elle sera celle qu'on démande.

Corol. Aiant supposé $c = o$, & conséquemment $ady = Xdt$, l'on aura $dy . X :: dt . a$. Mais en supposant dt constante, dy est le sinus de l'angle *BFP*. Donc le sinus de l'angle *BFP*. *X* (*GH*) :: $dt . a$. c'est-à-dire, en raison constante. Mais si *BF* est la Courbe *Brachystochrone*, & *BH* la Courbe dont les ordonnées *GH* expriment les vitesses aux points *F*, j'ai fait voir † dans le tems, que le sinus de l'angle *BFP* est

à

† *Voyez les* Actes de Leipsic *de* 1697. *pag.* 208. &c.

à GH en raison constante. D'où l'on voit que la Courbe BF a en même tems ces deux proprietez; puisqu'elle est telle que $\int X dx$ est un *maximum*, & en même tems $\frac{\int dt}{X}$ un *minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette proprieté lorsque c n'est pas $= o$.

PROBLEME. II.

Les mêmes choses étant posées, si l'on suppose maintenant que † PZ *soit comme la fonction donnée de l'arc* BF, *on demande la nature de la Courbe* BFN.

SOLUTION.

Si l'on suit la même méthode que ci-dessus, on résoudra facilement ce Problême. Car le triangle ZLT sera toujours égal au triangle $\zeta\lambda T$ par la nature du *maximum*, ou $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$. ‡ Mais LM $(LR - MR)$ est la différence des fonctions des deux arcs BFO, BFT; & $\lambda\mu$ $(\lambda\varrho - \mu\varrho)$ la différence des fonctions des deux arcs $BF\omega$, $BF\theta$; & l'on trouvera la différence de ces fonctions de la même maniére que ci-dessus, en multipliant simplement la fonction différentiée (aiant négligé la différentielle de l'arc dont * elle est fonction) par la différence des deux arcs BFO, BFT, c'est-à-dire, par TX. Donc à la place de $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, il faut écrire $FI \times \Delta\, BFO \times TX = \phi K \times \Delta\, BF\omega \times \theta\xi$. Maintenant par la proprieté de l'Ellipse supposée décrite des foyers F, ϕ, par le moyen d'un fil $= FO + O\phi = F\omega + \omega\phi$, les petites lignes OX & $\omega\xi$ sont égales entr'elles. Donc $TX . \theta\xi ::$ tang

* Pag. 240. in 4.

† FIG. I. ‡ FIG. II.

tang. IFO. tang. $K\omega\varphi$. De plus on a encore $FI. \varphi K :: FO \times$ sin. FOI. $\varphi\omega \times$ sin. $\omega\varphi K$. Donc si à la place de $FI, \varphi K$, & de $TX. \theta\xi$, on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionelles, on aura $FO \times$ sin. $FOI \times$ tang. $IFO \times \Delta BFO = \varphi\omega \times$ sin. $\varphi\omega K \times$ tang. $K\varphi\omega \times \Delta BF\omega$. Mais par la proprieté des sinus, tangentes & secantes, le sinus de $FOI \times$ tang. $IFO =$ sin. total $\times$ sin. IFO; de même le sinus de $\varphi\omega K \times$ tang. $K\varphi\omega =$ sin. total $\times$ sin. $K\varphi\omega$. On aura donc $FO \times$ sin. $IFO \times \Delta BFO = \varphi\omega \times$ sin. $K\varphi\omega \times \Delta BF\omega$; ou bien si à la place de BFO on prend son équivalente BF; & à la place de $BF\omega$, son équivalente $BF\varphi$; l'on aura $FO \times$ sin. $IFO \times \Delta BF = \varphi\omega \times$ sin. $K\varphi\omega \times \Delta BF\varphi$. Donc sin. $IFO \times \Delta BF$. sin. $K\varphi\omega \times \Delta BF\varphi ::$ $\varphi\omega (\varphi O). FO ::$ sin. $OF\varphi$. sin. $O\varphi F$. Et, *permutando*, sin. $IFO \times \Delta BF$. sin. $OF\varphi ::$ sin. $K\varphi\omega \times \Delta BF\varphi$. sin. $O\varphi F$. en raison constante. De sorte que ce Problême ainsi réduit à la pure Analyse, se peut proposer de cette maniére.

Trouver une Courbe BFφ *de telle nature que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconque* F, *soit au sinus de* IFO $\times \Delta$ BF *en raison constante.*

Pour résoudre ce Problême soit nommée, comme ci-devant † BP, y; PF, u, BF, t; Pp, dy; Cl, dx; Fl ou Fm, dt; & la fonction donnée de l'arc BF, v; l'on aura $ml = \frac{dtddy}{dx}$. Donc en faisant (selon la proprieté que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée) $\frac{dtddy}{dx}. dx \times \Delta v \left(\frac{dxdv}{dt}\right) :: dt. a$. l'on aura cette équation $\frac{adtddy}{dx^2} = dv$;

† Fig. III.

l'intégrale

& dt dont f

;* laquell

de la Courbe qu

...ème facilité, si on
en prenant PZ p
que ce soit, compo
non seulement de l'
PF, mais aussi de t
de telle manière qu'
toujours à cette p
de la courbure dans un po
que certaine quantité
Ainsi ce Problême étant
on trouvera facileme
exprime la nature de la Cour

de la même manié
& des *Brachystochr*
s'accordent facileme
j'ai données & que j'avo
méthodes: ce qui
à faire voir l'excellence
comme cette méthode est
une indirecte prise
laquelle donnera préc
; & cet accord me
méthodes, tant directe qu'i
d

...recte, nous assûrera encore de leur certitude.

Soit un linge † BFN étendu par une liqueur ...i le presse par dessus, dont la pesanteur soit uniforme ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible: & cela arrivera lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble feront un *maximum*. Il faut bien remarquer que je ne dis pas que cela arrivera lorsque le centre de pesanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considérer ici le centre de pesanteur, puisque la courbure *BFN* variant (quoiqu'elle soit isopérimetre) la quantité de liqueur contenue dans cette courbure changera aussi: ainsi le centre de pesanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace *BFN* soit divisé en ses filamens par les appliquées * verticales *PF*, *pf*, &c. Et soit la Courbe *BL* dont les ordonnées *GL* expriment les gravitations de la liqueur suivant la hauteur *BG* ou *PF*, c'est à dire, dont les appliquées *GL* & *ED* expriment le raport de ce dont la particule *FC* de la liqueur suivant sa profondeur *PF* pese plus ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne *PFCp*, qu'une égale particule *MN* suivant la profondeur *PM* n'est pressée par le poids de la colonne *PMnp*: comme donc *LG* exprime la gravitation de la particule *FC*, & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite *GC* prolongée, de même comme *DE* marque la gravitation de la particule *Mn* & des autres qui se trouvent dans la droite *EM* prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est

* Pag. 212. in 4.

† Fig. 1.

$= dv$, ou $\frac{adtddy}{dt^2 - dy^2} = dv$, dont l'intégrale eſt $v = \int \frac{adtddy}{dt^2 - dy^2}$, ou (parceque a & dt dont ſuppoſées conſtantes) $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$; * laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande.

* Pag. 241. in 4.

REMARQUE.

On trouvera avec la même facilité, ſi on le veut, la † Courbe $BF\varphi$ en prenant PZ pour quelqu'autre fonction que ce ſoit, compoſée à volonté des fonctions non ſeulement de l'arc BF, ou de l'appliquée PF, mais auſſi de toutes les deux enſemble de telle maniére qu'on voudra. Car on en viendra toujours à cette proprieté que le ſinus de la courbure dans un point quelconque F, eſt à une certaine quantité en raiſon conſtante. Ainſi ce Problême étant réduit à la pure Analyſe, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée.

On peut auſſi réſoudre de la même maniére le Problême des *Catenaires* & des *Brachyſtochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ai données & que j'avois trouvées par differentes méthodes: ce qui ne contribue pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. Au reſte comme cette méthode eſt directe, je vais en ajoûter une indirecte priſe de la preſſion des liqueurs, laquelle donnera préciſément la même ſolution; & cet accord merveilleux de ces deux méthodes, tant directe qu'in-

di-

† FIG. I.

directe, nous assûrera encore de leur certitude.

Soit un linge † *BFN* étendu par une liqueur qui le presse par dessus, dont la pesanteur soit uniforme ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible: & cela arrivera lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble feront un *maximum*. Il faut bien remarquer que je ne dis pas que cela arrivera lorsque le centre de pesanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considérer ici le centre de pesanteur, puisque la courbure *BFN* variant (quoiqu'elle soit isopérimetre) la quantité de liqueur contenue dans cette courbure changera aussi: ainsi le centre de pesanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace *BFN* soit divisé en ses filamens par les appliquées * verticales *PF*, *pf*, &c. Et soit la Courbe *BL* dont les ordonnées *GL* expriment les gravitations de la liqueur suivant la hauteur *BG* ou *PF*, c'est à dire, dont les appliquées *GL* & *ED* expriment le rapport de ce dont la particule *FC* de la liqueur suivant sa profondeur *PF* pese plus ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne *PFCp*, qu'une égale particule *MN* suivant la profondeur *PM* n'est pressée par le poids de la colonne *PMnp*: comme donc *LG* exprime la gravitation de la particule *FC*, & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite *GC* prolongée, de même comme *DE* marque la gravitation de la particule *Mn* & des autres qui se trouvent dans la droite *EM* prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est

* Pag. 242. in 4.

† Fig. I.

à dire, les espaces *BLG* & *BDE* marqueront toutes les gravitations (je ne dis pas les pesanteurs) prises ensemble de toutes les particules qui se trouvent dans les colonnes *PFCp*, *PMnp*. Si donc on décrit une autre Courbe *BH*, dont les appliquées *GH* soient respectivement comme les espaces *BLG*, & si à *P* on applique $PZ = GH$, l'on aura une nouvelle Courbe *BZN* dont les appliquées *PZ* exprimeront la somme des gravitations des particules par raport à leurs colonnes respectives *PFCp*, & par conséquent la somme des appliquées *PZ*, c'est à dire, tout l'espace *BZN* représentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenue dans le linge ou la voile *BFN*. Donc puisque la voile prend une telle figure ou courbure que toutes les gravitations prises ensemble (c'est à dire l'espace *BZN*) font un *maximum*; il est clair que si l'on emploioit une liqueur d'une pesanteur continuellement différente, avec cette loi ou condition que *LG*, *DE*, ou les gravitations des particules dans les profondeurs de *F*, *M*, fussent dans la raison des différentielles des appliquées *GH* (lesquelles dans le Problême de mon Frere marquent les fonctions des mêmes *PF*) il est clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile seroit la même que la courbure que mon Frere m'a* proposée de chercher seulement pour les puissances de *PF*. Mais je l'ai résolu ci-dessus ce Problême par la méthode directe pour une fonction quelconque.

* Pag. 243. in 4

Afin donc que je montre l'accord de cette méthode directe avec l'indirecte, je vas chercher la nature de la Courbe ou courbure que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie suivant le raport que

j'ai

j'ai marqué; que si je tombe dans la même équation trouvée ci-dessus, qui est ce qui osera douter de l'infaillibilité de ces méthodes? Il se présente ici d'abord un cas fort facile, qui est lorsque la pesanteur de la liqueur est uniforme, ce qui est ordinaire, c'est à dire, lorsque les gravitations *LG*, *DE*, sont entr'elles comme les profondeurs *BG*, *BE*; ce qui rend la Courbe *BL* une ligne droite, & la Courbe *BH* une parabole ordinaire: alors *BFN* sera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribuée à son *Elastique*, & dont la nature s'exprime (comme je l'ai trouvé autrefois aussi bien que mon Frere) par cette équation $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

Maintenant si dans l'équation générale $y = \int \frac{Xdx}{\sqrt{aa - XX}}$ trouvée ci-dessus (*Sol. Probl.* I.) par la méthode directe, on met à la place de la fonction générale X, le cas particulier xx que l'on suppose ici, l'on aura $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{aa - x^4}}$, ou (aiant suplée aux termes homogenes) $y = \int \frac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ce qui fait voir déja en ceci l'accord des méthodes.

Si l'on suppose présentement pour loi générale de la gravitation de la liqueur que la Courbe *BDL* soit une Courbe quelconque, & qu'on veuille trouver la nature de la courbure de la voile *BFN*, on le peut faire par la méthode dont je me suis servi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle consiste en ceci que la direction de la pression

O 2 de

de la liqueur, qui est par tout perpendiculaire à la Courbe, soit regardée * comme composée de deux pressions collatérales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre prise séparément, on cherche quelle est la ténacité requise dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas est étendue suivant la tangente *a*, qui est la force absolue étant constante dans quelque point de la courbure que la voile soit suspendue, ou (si on l'aime mieux) qu'elle soit attachée à un clou. Ainsi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité constante prise à volonté, de la manière que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires ou catenaires, on trouvera la même équation que j'ai trouvée ci-dessus par la méthode directe. Cette manière d'operer, quoique legitime, est néanmoins plus longue & n'est pas si naturelle que cette autre que j'ai découverte depuis peu de tems, & que je vas rapporter ici.

* Pag. 424 in 4.

Parceque chaque particule † *Ff* du linge ou de la voile est pressée suivant *FI*, qui est une direction perpendiculaire à la Courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui appuie dessus, ou par la gravitation de la particule *FC* de la liqueur, laquelle gravitation est exprimée par la ligne *LG*, la Courbe sera la même que celle qui se formeroit, si je concevois que le fil ‡ *BRFST* fût étendu par des puissances *R* 1, *F* 2, *S* 3, *T* 4, &c. perpendiculairement appliquées à tous les points *R*, *F*, *S*, *T*, &c. & proportionelles aux appliquées correspondantes *ED*, *LG*, *VK*, &c. Or je vas montrer d'une manière facile que cette Courbe, & par conséquent la courbure du linge, est la même que celle

† Fig. I. ‡ Fig. IV.

celle que j'ai trouvée ci-dessus par la méthode directe.

Soit la Courbe conçûe comme un polygone d'une infinité de côtez *BR*, *RF*, *FS*, *ST*, &c. lesquels étant prolongez font des angles *aRF*, *bFS*, *cST*, &c. qui marquent les courbures de la Courbe dans les points *R*, *F*, *S*, &c. Maintenant on sçait par les loix de la Méchanique que la puissance 1*R* qui pousse, est à la puissance *l* qui soûtient, ou (ce qui est la même chose) à la force de la ténacité requise du fil dans un point quelconque moien entre * *R* & *F*, comme le sinus de l'angle *aRF* est au sinus de l'angle *BRl*, c'est à dire, au sinus total: de même la puissance qui soûtient en *l*, est à la puissance 2*F* qui pousse, comme le sinus de l'angle 2*Fm* ou le sinus total est au sinus de l'angle *bFS*; d'où il est évident que la puissance 1*R* est à la puissance 2*F*, comme le sinus de l'angle *aRF* est au sinus de l'angle *bFS*. On démontrera de la même maniére que la puissance 2*F* est à la puissance 3*S*, comme le sinus de *bFS* est au sinus de *cST*; & ainsi de suite. Donc la puissance 1*R* est à la puissance 3*S*, comme le sinus de l'angle *aRF* est au sinus de l'angle *cST*, & *permutando*, le sinus de l'angle *cST* est à la puissance 3*S* (*KV*), comme le sinus de l'angle *aRF* est à la puissance 1*R* (*DE*): c'est à dire que le sinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque *R* est à *DE* que je suppose exprimer la fonction différentiée de *BE*, en raison constante. Or j'ai prouvé par la méthode directe cette même propriété. Donc la courbure du linge ou de la voile chargée de la maniére qu'on le vient de dire, & celle des Isopérimetres, est la même. Donc la méthode directe & l'indirecte

* Pag. 245. in 4.

se confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DESCRIPTION D'UNE EXOSTOSE MONSTRUEUSE.

PAR M. MERY.

† SUR la fin de l'hyver dernier on amena à l'Hôtel-Dieu un Soldat *Irlandois*, âgé d'environ 40 ans, dont les deux condils *A*, *A*, premiere Fig. *B*, *B*, seconde Fig. du femur *C*, formoient par leur dilatation extraordinaire une Exostose monstrueuse, tant par sa grosseur que par sa figure.

La violente douleur qu'elle causoit à ce pauvre malade, le força à me demander avec empressement que je lui * coupasse la cuisse; ce que je fis pour apporter quelque soulagement à ses souffrances.

* Pag. 246. in 4.

Après cette operation, j'éxaminai à loisir dans mon cabinet cette monstrueuse Exostose, sur laquelle je fis les remarques que je vais rapporter.

Premiérement, j'observai que cette Exostose séparée du corps du femur *C*, & de la jambe; mais recouverte encore des tegumens communs, & des aponevroses des muscles qui envelopent le genou, pesoit environ quinze à seize livres. Revêtue de ces parties, elle formoit une espece de globe, qui avoit 9 pouces de large, sur 9½ de haut: sa superficie paroissoit assez égale; mais depouillée de ces parties, elle parut fort inégale & raboteuse, son poids diminua de 4 livres

† 2. Juin 1706.

Fig. 2.

Fig. 4.

semblable à celles des polypes, qui s'engendrent dans le cœur & dans ses vaisseaux; de sorte qu'il paroît fort vrai semblable que cette matiere aiant d'abord rompu les fibres osseuses de la partie spongieuse interieure des condils du femur, elle en avoit dilaté ensuite la partie solide exterieure.

Mais parceque cette partie solide, qui formoit ce globe, étoit percée d'une infinité de trous de figures irrégulieres, & de grandeur fort différente: il y a aussi bien de l'apparence que les sels corrosifs, dont cette matiere étoit empreinte, avoient détruit une partie de ce globe, & dissout les fibres osseuses qui forment par leur assemblage les petites cellules des condils du femur; ce qui donne lieu à cette conjecture, c'est que je trouvai un tartre rougeâtre attaché au dedans & au dehors de ce globe, qui en avoit rongé les surfaces.

Mais aussi parceque ce globe osseux étant dépouillé de toutes les parties charnues qui le couvroient, & vuide entierement de toute la matiere polypeuse qu'il renfermoit dans sa capacité, pesoit étant sec beaucoup plus que ne peuvent faire (en cet état) les condils du femur du plus grand homme, on ne peut, ce me semble, douter qu'une partie de cette matiere n'ait servi à son augmentation.

† Quatriémement, j'observai sur la surface posterieure de ce globe une rainure *F*, *F*, *F*, fort profonde, dans laquelle passoient les arteres & les nerfs qui descendoient à la jambe; & les veines qui de cette partie remontoient à la cuisse. Cette rainure étoit percée dans son fond de plusieurs trous, par lesquels quelques rameaux

† FIG. II.

meaux de ces vaiſſeaux entroient & reſſortoient de la capacité de ce globe.

† Dans le même endroit je découvris de plus quatre cavernes oſſeuſes, de grandeur & de figure différente. Elles * étoient remplis d'une matiere ſemblable à celle qui étoit renfermée dans ce globe. Ces cavernes avoient auſſi pluſieurs ouvertures: par les unes elles communiquoient avec ſa capacité, & par les autres avec les parties membraneuſes & charnues qui couvrent le genou. Leur cavité étoit fort raboteuſe, & paroiſſoit avoir été rongée par la partie tartareuſe de la matiere qui s'y étoit amaſſée. * Pag. 4.

Cinquiémement, enfin la derniere obſervation que je fis ſur cette monſtrueuſe Exoſtoſe, fût qu'en plongeant un inſtrument dans ſa concavité pour en ôter la matiere polypeuſe qui y étoit renfermée, il ſortit du centre de cette matiere deux palettes ou environ d'une liqueur jaune & fort claire; ce qui me fit croire qu'il y avoit dans le centre de cette matiere une cavité dans laquelle cette liqueur pouvoit être contenue.

EXPLICATION DES FIGURES.

Premiere figure. Moitié de grandeur & faiſant le quart de cette Exoſtoſe vûe par devant.

A, A. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
D. La place de la rotule.
E, E. La place de la partie ſuperieure du tibia.

† Fig. II. 1, 2, 3, 4.

Seconde Figure vûe par derriere.

B, *B*. Les deux condils du femur.
C. Le corps du femur.
E, *E*. La place de la partie superieure du tibia.
F, *F*, *F*. La rainure par laquelle passoient les vaisseaux de la jambe.
1, 2, 3, 4. Cavernes osseuses en parties ouvertes & en partie fermées.

Pag. in 4.

* REFLEXIONS SUR L'ECLIPSE DU SOLEIL.

Du 12 Mai 1706.

Par M. CASSINI.

† JAMAIS Eclipse n'a eu d'Observateurs plus illustres que celle de Soleil qui est arrivée le 12 de Mai de cette année 1706.

Elle a été observée attentivement à *Marli* par le Roi & par les Princes en diverses maniéres, avec divers instrumens préparez par des Astronomes de l'Académie Royale des Sciences. On l'a vûe directement avec des verrez colorez & avec des Lunettes, dont quelques-unes avoient au foyer un reticule qui divisoit le disque du Soleil en 12 doits, & avec d'autres Lunettes à deux verres convexes, qui étant placées sur des machines dirigées au Soleil, envoioient son image assez grande & assez distincte sur un carton opposé, où étoit un cercle égal à cette image

† 23 Juin 1706.


1706. Pag. 322.
e monst
un Foemi
C
Fig. 2.
3
B
F

ge divisé par des circonférences concentriques en doits & en demi-doits.

Le Soleil aiant été couvert au commencement de l'Eclipse, on observoit ses phases à mesure qu'il sortoit des nuages.

Le tems des phases étoit marqué par une pendule à secondes, reglée le jour précédent & le même jour de l'Eclipse par l'observation des hauteurs du Soleil & de quelques étoiles fixes, & rectifiée par des observations semblables réiterées à la présence des Princes.

A l'Observatoire Royal, où il y eut un grand concours de Sçavans & de personnes illustres par leurs dignitez & par leur rang, on observa l'Eclipse par les mêmes maniéres qu'elle fût observée à *Marli*, & par d'autres où l'on * mit en usage les instrumens plus propres pour les observations.

* Pag. 250. in 4.

On y emploia la grande Lunette excellente de 34 pieds exposée sur la terrasse, qui avoit au foyer un papier sur lequel on avoit décrit un cercle égal à l'image du Soleil qu'il recevoit, divisée en doits par des circonférences concentriques, dont l'exterieure étoit divisée en 360 degrez pour mesurer la distance des cornes pendant la durée de l'Eclipse; ce qui joint à l'observation des doits auroit servi à bien determiner la proportion des diamétres du Soleil & de la Lune, si quelque agitation de l'air & la foule des spectateurs n'en avoit rendu les observations un peu douteuses.

On observa avec plus d'exactitude par le Micrometre placé au foyer des Lunettes, dont l'une étoit placée sur la machine parallatique, & une autre Lunette sur un autre support convenable. Par ce Micrometre on mesuroit les pha-

ses de l'Eclipse quand le Soleil étoit dégagé des nuages, & quand les personnes considérables qui vouloient voir cette méthode d'observer ne l'empêchoient point.

La plus grande phase de cette Eclipse, tant à *Marli* qu'à l'Observatoire Royal, approcha de 11 doits, à un sixiéme prés, comme on peut voir dans le détail des observations.

Nous avons depuis eu des relations de cette Eclipse observée en plusieurs Villes du *Languedoc*, de *Provence* & de *Suisse*; & particuliérement, à *Narbonne*, à *Montpellier*, à *Arles*, à *Tarascon*, à *Marseille*, à *Avignon*, à *Geneve* & à *Zuric*, où cette Eclipse a été totale avec une durée de quelques minutes d'heure.

En toutes ces Villes l'air s'obscurcit desorte que l'on fût obligé d'allumer les chandelles pour lire & pour travailler, & de quitter le travail à la campagne.

Dans cette obscurité on vit au Ciel proche du Soleil éclipsé Saturne, Venus & Mercure. A *Arles* où l'Eclipse totale a duré un peu plus que dans ces autres Villes, on a vû plus loin du Soleil un grand nombre d'autres étoiles comme en pleine nuit.

*Pag 251. n 4. * Le peuple qui en ce jour là étoit en grand nombre dans les rues fit des exclamations, & donna des marques d'une grande épouvante.

Les animaux mêmes sentirent cette Eclipse. Dans les Villes les oiseaux nocturnes étant sortis de leurs trous, voltigeoient dans l'air en grand nombre; les autres oiseaux s'étant retirez, comme ils ont coûtume de faire pendant la nuit. A la campagne ils montroient avoir de la peine à voler; & étant chassez avec des pierres, ils

voloient bas, comme quand ils sont poursuivis par des oiseaux de proye.

Dans toutes ces Villes, au tems de l'Eclipse totale, on a vû autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil, une couronne d'une lumiere pâle.

A *Narbonne* M. l'Abbé *le Pech* l'a observée en forme d'un fil lumineux, distinguée en deux anneaux concentriques, dont la lueur étoit néanmoins bien pâle.

A *Montpellier* Mrs. *de Plantade*, *Bon* & *Clapiés* virent cette lumiere très-blanche, qui formoit autour du disque de la Lune une espece de couronne de la largeur d'un doit Ecliptique. Dans ces bornes la lumiere conservoit une égale vivacité, qui se changeant ensuite en une foible lueur formoit autour de la Lune une aire circulaire d'environ huit degrez de diamétre, & se perdoit insensiblement dans l'obscurité.

A *Marseille* le P. *Laval* & M. *Chazelles* ont observé la lumiere qui environnoit immédiatement la Lune de la largeur d'un doit Ecliptique comme à *Montpellier*.

A *Tarascon* M. le Comte *Marsigli* vit cette lumiere comme une couronne de rayons pressez ensemble. Il vit aussi dans la partie occidentale du Ciel des nuages d'une couleur extraordinaire.

Ce n'est pas la seule fois qu'on a observé un semblable Phénomene dans les Eclipses totales du Soleil.

Dans le recueil que le Pere *Riccioli* en a fait dans son *Almageste*, il y en a plusieurs où l'on a vû un cercle de lumiere autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil.

* On a crû que c'étoit un reste du bord du So- * Pag. 252. in 4.

Soleil vû directement, en supposant que c'étoit une Eclipse annulaire. Une apparence semblable à celle qui a été observée dans cette derniere Eclipse, pourroit bien avoir fait juger quelquefois annulaires des Eclipses du Soleil, qui à la verité étoient totales. On les peut examiner par les Tables des modernes, qui depuis l'usage de la Lunette donnent la proportion des diamétres apparens du Soleil & de la Lune beaucoup plus exacte que les Tables anciennes.

Tycho Brahé qui travailloit à l'Astronomie avant l'invention de la Lunette, avoit réglé la proportion de ces diamétres de sorte que suivant ses dimensions la Lune ne pouvoit jamais cacher entierement le Soleil à la terre. Il auroit donc pu juger qu'un anneau de lumiere semblable à celui qu'on a observé autour de la Lune en cette Eclipse étoit le bord même du Soleil qui ne fût point éclipsé entierement, ce que nous ne pouvons pas appliquer à cette Eclipse, dans laquelle on a distingué parfaitement cette lumiere pâle d'avec le bord du Soleil, qui parut avec un grand éclat, aussi-tôt que sa moindre partie sortit de la Lune; & d'ailleurs nous sçavons certainement que le diamétre apparent de la Lune étoit plus grand de près de deux minutes que le diamétre apparent du Soleil.

Kepler dans son Astronomie optique attribue l'apparence de cette couronne autour de la Lune, lorsqu'elle éclipse entierement le Soleil, à une matiere celeste qui environne la Lune, & qui est d'une densité capable de recevoir & envoyer vers la terre les rayons du Soleil, & représenter cette apparence de l'anneau lumineux. Il ne fait pas difficulté d'accorder à la Lune une espece d'atmosphère analogue à celle qui environne

ne la terre, capable de causer de la refraction aux rayons du Soleil. Il éxamine encore dans son Traité de la nouvelle Etoile du Serpentaire d'autres causes qui peuvent faire cette apparence, où parlant de la densité de la matiere celeste autour de la Lune, il dit qu'elle n'est pas toujours de la même maniére.

* Nous avons souvent observé des Eclipses de Saturne, de Jupiter & de ses Satellites, & de quelques Etoiles fixes causées par la Lune sans nous être apperçu d'aucun changement dans ces Astres dans leur Immersion; ce qui nous donna occasion de juger qu'il n'y avoit pas pour lors d'atmosphere sensible autour de la Lune à l'endroit qui cachoit l'Etoile: mais en quelques-autres observations il nous a paru que l'Etoile s'allongeoit un peu en se cachant derriere la partie tant obscure que claire de la Lune; ce qui nous a fait juger que pour lors il y avoit en cet endroit de la Lune quelque matiere dense capable d'alterer les rayons de ces Astres & causer ces apparences; ce qui seroit assez conforme à la pensée de *Kepler*. * Pag. 253. in 4.

Il y a un grand Phénomene dans le Ciel qui nous a persuadé depuis long-tems qu'il pourroit bien faire paroître une chevelure lumineuse au Soleil dans ses Eclipses totales.

C'est cette lumiere répandue sur le Zodiaque que nous commençames d'observer avec admiration au mois de Mars de l'année 1683. Dans le rapport que nous en donnames au *Journal* du mois de Juin de la même année, nous jugeames *que si on avoit pû voir cette lumiere à la présence du Soleil, elle lui auroit formé peut-être une espece de chevelure.*

Voici le cas qui est arrivé de la pouvoir voir

à la

à la présence du Soleil élevé sur l'horizon, lorsqu'il étoit entierement caché par la Lune dans cette Eclipse totale. On commença de voir cette couronne lorsque l'air étoit à un tel degré d'obscurité qu'on pouvoit distinguer des Etoiles qu'on ne commence à voir ordinairement qu'à l'heure que nôtre Phénomene est prêt de paroître, & lorsque le Soleil est assez plongé sous l'horizon pour terminer le crepuscule.

On peut voir les raisonnemens que nous avons faits sur cette lumiere dans le Traité qui est inseré dans le Livre des voyages de l'Académie sur les observations du Printemps de l'an 1683, & sur celles que nous continuames d'en faire dans la suite.

* Pag. 254. in 4. * On peut voir aussi ce qui en a été écrit dans la suite par M. *Fatio*, auquel nous fimes voir ce Phénomene à l'Observatoire Royal, & qui en continua les observations avec une grande assiduité & nous les communiqua avec ses réflexions dans une Lettre qu'il donna depuis au public.

Nous avons supposé qu'il y a alentour du Soleil une matiere lumineuse plus dense proche de cet Astre, & plus rare à une plus grande distance, où elle est facilement effacée par les crepuscules & par la clarté de la Lune. Dans cette Eclipse on aura pu voir aisément la partie de cette lumiere plus dense qui environne immédiatement le Soleil, comme il est arrivé en diverses Villes. La partie la plus rare qui lui succedoit à une plus grande distance du Soleil n'aura pas pu être observée aisément ; néanmoins les Astronomes de *Montpellier* qui apporterent une attention particuliere pour voir s'ils

s'ils ne distingueroient point nôtre lumiere, remarquerent autour de cette couronne une aire lumineuse plus pâle qui s'étendoit jusqu'à la distance de quatre degrez de côté & d'autre. Le reste de la lumiere qui s'étend à une distance beaucoup plus grande n'aura pas été visible, à cause que l'obscurité de l'air n'étoit pas assez grande pour pouvoir distinguer la partie la plus rare qui est plus éloignée du Soleil, & qui ne paroît le matin qu'avant que le crepuscule commence, & le soir qu'après qu'il est fini. En effet les Observateurs de *Montpellier* ont remarqué que cette plus grande obscurité ne pouvoit être comparée ni à la nuit ni au crepuscule.

Au reste nous avons supposé que cette matiere lumineuse est ordinaire au Soleil, quoiqu'elle puisse n'avoir pas toujours la même étendue ni le même éclat, & nous avons cherché tous les Mémoires que nous avons pu avoir des observations d'une apparence semblable à celle-ci.

Après avoir rapporté toutes celles que nous avions pu recueillir dans nôtre Traité, nous en avons trouvé encore d'autres, dont la plus évidente parmi les anciennes nous paroît celle qui est rapportée par *Samuel Maioli* Evêque de *Volturara* dans son Ouvrage des jours Caniculaires,* où il dit au Chapitre des Meteores * Pag. 255. qu'il avoit vû très-souvent, particulierement in 4. dans les crepuscules d'Automne, une matiere éclatante & comme ardente en forme d'une colonne, ou d'une poutre, tantôt droite, tantôt oblique.

Aiant donc supposé cette matiere lumineuse, on en pourra voir la partie plus dense qui envi-

vironne immédiatement le Soleil dans les Eclipses totales, avec quelques différences en divers lieux de la terre, suivant la diverse constitution de l'air.

Les observations de cette Eclipse étant comparées au calcul tiré de nos Tables Astronomiques, ont fait voir qu'il n'y avoit pas deux minutes de différence entre les tems des phases observées & le tems des mêmes phases calculées, & qu'il n'y avoit que quelques minutes de doit de différence dans la grandeur des phases. Aiant corrigé cette différence, nous avons trouvé qu'après cette petite correction, le calcul représentoit exactement l'Eclipse totale, & sa durée dans les lieux où elle a été observée, & qu'elle représentoit aussi avec la même justesse les tems & les phases observées en d'autres lieux où elle a été partiale. Nous en avons une de *Rome* faite par M. *Bianchini*, une de *Gennes* faite par M. le Marquis *Salvago*, de *Bologne* faite dans l'Observatoire de M. le Comte *Marsigli* par Mrs. *Manfredi* & *Stancari*, une de *Strasbourg* faite par M. *Eisenschmid*, une de *Madrid* faite par le Pere *Cassani*, outre celles de l'Eclipse totale que nous avons déja rapportées.

Après une semblable rectification des hypotheses, nous avons entrepris de décrire avec la précision que l'état présent de la Géographie le peut permettre les autres lieux où cette Eclipse a été totale, comme nous fimes dans l'Eclipse de l'année 1699, où nous déterminames la route de l'Eclipse centrale sur la surface de la terre, de la maniére qu'elle est décrite dans les Mémoires de l'Académie de la même année, qui a été depuis vérifiée par les observations

de

de ces païs-là qui nous ont été communiquées.

* On a emploié dans cette recherche la méthode que nous avons accoûtumé de pratiquer depuis que nous travaillons à l'Astronomie, dont il est fait mention il y a près de 50 ans par M. l'Abbé *Giustiniani* dans son Livre des Auteurs de la *Ligurie*. Il en a été aussi parlé dans l'Histoire de l'Académie de M. *du Hamel*, & dans les Ouvrages de quelques autres Auteurs ausquels nous l'avons communiquée. * Pag. 256. in 4.

Mon fils & M. *Maraldi* ont trouvé par nôtre méthode que cette Eclipse a commencé de paroître totale au lever du Soleil dans l'*Ocean Atlantique*, au milieu du trajet qui est entre l'Isle de *Cayenne* & les Isles du *Cap vert*. Ensuite l'Eclipse parut totale un peu à l'Occident des Isles du *Cap vert*, l'ombre totale de la Lune aiant parcouru plus de 10 degrez de la circonférence de la terre en 4 minutes d'heure. Après elle traversa les *Canaries*, d'où elle passa vers *Cadix*, & parcourut la partie Meridionale de l'*Espagne*, passant par *Seville*, par *Valence* par la *Catalogne*. Elle entra ensuite dans le Royaume de *France* par le *Roussillon*, & passa par la partie Meridionale du *Languedoc*, l'Eclipse aiant été observée totale à *Perpignan*, à *Narbonne*, à *Besiers*, à *Montpellier* & à *Arles*, où elle a été centrale.

Elle a été aussi observée totale à *Tarascon*, à *Marseille*, à *Avignon*, à *Geneve* & à *Zuric*. Elle aura aussi été totale à *Valence* en *Dauphiné*, à *Grenoble*, dans la partie Orientale de la *Savoye*, à *Sion* dans les *Suisses*, à *Ausbourg*, à *Ratisbonne*, dans la *Boheme*, dans la *Prusse*, dans la partie Septentrionale de la *Moscovie*, dans la gran-

grande Tartarie, & elle aura cessé de paroître totale au coucher du Soleil à 150 degrez de longitude & 52 degrez de latitude Septentrionale, l'ombre totale de la Lune aiant parcouru tout cet espace de terre compris entre l'*Ocean Atlantique* & la *Tartarie* Orientale en 2 heures 50 minutes.

Les lieux de la terre qui ont été éloignez de la trace décrite par le centre de l'ombre jusqu'à la distance d'un degré, c'est-à dire de 25 lieues vers le Midi & d'autant * vers le Septentrion, un peu plus, ou un peu moins, auront eu aussi l'Eclipse totale, mais par un moindre espace de tems; de sorte qu'il y aura des lieux qui ne l'auront vûe totale que pendant un instant.

* Pag. 257. in 4

La durée de l'obscurité totale qui a été estimée à *Arles* d'environ 6 minutes (quoiqu'en comparant le commencement & la fin de l'obscurité, où l'on n'a point marqué de secondes, elle ne s'y trouve que de 5 minutes) aura été des plus grandes; car l'excès du diamétre apparent de la Lune au Soleil diminué par la parallaxe, devoit étre parcouru environ en 5 minutes de tems.

Les païs qui ont eu l'Eclipse centrale auront eu la durée de l'obscurité totale un peu différente les uns des autres, à cause de la différence qui résulte de la distance de la Lune en diverses heures du jour à diverses parties de la surface de la terre, & diverses distances de la Lune à son Perigée, d'où elle s'éloignoit dans cette Eclipse, outre la différence qui est causée par la diverse obliquité des rayons du Soleil à diverses parties de la terre.

Cette trace que le centre de l'ombre dans l'Eclipse a parcouru sur la surface de la terre, à

croisé

croisé obliquement la trace qui fut décrite dans l'Eclipse centrale du Soleil de l'an. 1699, dont on a fait la description dans les Mémoires de l'Académie de la même année. On marqua que l'Eclipse centrale alla du *Groenland* par la partie Septentrionale de l'*Ecosse*, par la partie Meridionale du *Dannemark*, par les parties Septentrionales de la *Pomeranie*, entre la *Pologne* & la *Transylvanie*, par la *petite Tartarie*, par la *Mer noire*, par l'*Armenie*, par la *Perse*, par le Royaume de *Mogol*, par les *Indes Orientales* jusqu'aux confins du Royaume de *Siam*, y étant toujours allée du Nord-Ouest vers le Sud-Est, au lieu que celle de cette année est allée du Sud-Ouest vers le Nord-Est. Ces deux traces se sont croisées en *Pologne*.

Nous avons aussi décrit les lieux où l'Eclipse de cette année a été de six doits, tant du côté du Midi que du côté du Septentrion. Du côté du Midi la phase de six * doits est arrivée au lever du Soleil dans la mer, où l'Equinoxial coupe le premier Meridien. Delà elle est passée par l'*Afrique* suivant une ligne qui la traverse depuis la *Guinée* jusqu'au Golfe de la *Sidre*. Ensuite elle a traversé la Mediterranée & a passé par l'Isle de *Candie*, par l'*Asie mineure*, par la *Georgie*, par la *petite Tartarie* & par la partie Meridionale de la *grande Tartarie*.

* Pag. 258. in 4.

La phase Septentrionale de 6 doits a commencé dans la mer qui est entre l'Isle de *Terre-neuve* & les *Açores*, a passé par la partie Orientale de l'*Irlande*, à l'Occident de l'Isle de *Spitsberg*, & dans les païs qui sont proches du Pole Septentrional.

La ligne qui distingue les païs Meridionaux qui ont eu un peu d'Eclipse de ceux qui ne

l'ont point vûe, passe à l'Occident de l'Isle de *S. Thomé* par la partie Meridionale de l'Egypte, par la partie Septentrionale de l'*Arabie*, & par le milieu de la *Perse* & du *Mogol*.

Du côté du Septentrion une partie de la penombre tombe hors de la terre.

La différence de 2 à 3 minutes d'heure qui s'est trouvée entre les tems des phases de cette Eclipse observée à *Paris*, & le tems qui avoit été calculé dans les *Ephemerides* & la *Connoissance des Tems*, & la différence de quelques parties de doits qui s'est trouvée dans la grandeur de l'Eclipse ne paroîtra pas considérable à ceux qui n'ignorent point la multitude des principes qui concourent à déterminer une de ces Eclipses, & les observations qu'il faut comparer ensemble pour établir chacun de ces principes.

Du côté du Soleil il y a sa longitude moienne, le lieu de son Apogée, sa plus grande équation, la méthode de la distribuer par divers degrez de distance de l'Apogée pour déterminer son lieu véritable, le demi-diamétre apparent du Soleil & les regles de sa variation, sa parallaxe, sa réfraction sujette à des irregularitez physiques très-difficiles à réduire à quelques regles exactes, & l'obliquité de l'Ecliptique à l'Equinoxial. Il y a aussi l'équation du tems, * qui consiste dans la réduction du tems moien au tems véritable, dans laquelle les Astronomes modernes different entr'eux de plusieurs minutes, comme il est arrivé même dans cette Eclipse.

*Pag 259. in 4.

Du côté de la Lune il y a les principes correspondans à ceux du Soleil que nous venons d'indiquer, & plusieurs autres équations qui ne con-

conviennent point au Soleil. Une qui dépend de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune. Une qui dépend de la distance de la Lune au Soleil... Une de la distance même du Soleil à son propre Apogée, qui ont toutes des regles particulieres de variation, aussi-bien que le diamétre apparent de la Lune & sa parallaxe, qui font la plus grande diversité des Eclipses totales & partiales. Il y a aussi à déterminer les nœuds de la Lune, leurs moiens mouvemens, leurs équations, l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'Ecliptique & sa variation, d'où dépend la latitude de la Lune.

Du côté de la terre il y a son exposition au Soleil, qui varie à chaque instant en des sens différens par le mouvement journalier suivant l'Equinoxial & ses paralleles, & par le mouvement annuel suivant le Zodiaque: les longitudes & les latitudes des lieux dont on veut sçavoir s'il y aura Eclipse ou non; qu'elle doit être la différence de sa grandeur & de sa durée en différens lieux.

Pour la détermination de chacun de ces principes on emploie différentes hypotheses sur lesquelles on peut avoir quelque doute, parcequ'on n'a pas toutes les observations qui seroient nécessaires à une détermination précise, & celles qu'on a ne sont pas toujours faites avec assez d'exactitude.

Nonobstant toutes ces difficultez on a réduit la méthode des Eclipses à un tel état, qu'elle peut servir à trouver la longitude Géographique des lieux éloignez où la même Eclipse a été observée avec assez de précision. Nous en avons fait l'expérience dans cette derniere Eclipse sur les observations qui nous en ont été envo-

voyées de différens lieux. Nous les donnerons suivant l'ordre des longitudes* des lieux où cette Eclipse a été observée dans un autre Mémoire.

* Pag. 260. in 4.

SUITE DE L'ARTICLE TROIS DES ESSAIS DE CHIMIE.

Par M. HOMBERG.

† J'AI proposé dans mon dernier Mémoire la matiere de la lumiere pour mon souffre principe, & pour le seul principe actif. J'ai prouvé que cette matiere est continuellement en mouvement, & qu'elle pénétre sans cesse tous les corps poreux qui sont dans l'Univers; ce que j'ai crû un attribut nécessaire du principe actif. J'ai prouvé aussi que la matiere de la lumiere en pénétrant les corps poreux s'y peut arrêter, les augmenter de poids & de volume; les changer de figure, & joindre différens principes ensemble pour en composer des mixtes nouveaux, ce qui est le caractere que je donne à mon souffre principe; il me reste maintenant à proposer une idée vrai-semblable de la maniére que la matiere de la lumiere s'introduit & s'arrête dans les autres principes, & comment ces autres principes par-là changent de figure & deviennent des matieres sulphureuses, qui sont la partie active de tous les mixtes.

Il faut se souvenir ici que nous avons supposé dans tous les corps non seulement des pores qui donnent un passage très-libre à la matiere de la lumiere, mais aussi une partie solide, qui est pro-

† 30. Juin. 1706.

proprement la substance de chaque corps, contre laquelle la matiere de la lumiere est poussée continuellement par le Soleil & par les autres flames, & de dessus laquelle cette matiere reflechit & ne la pénétre que fort difficilement.

Nous devons considérer la matiere solide d'un corps en deux maniéres: La premiere est quand nous la regardons * comme un corps composé, ou sa substance entiere, par exemple du bois, de l'argent, &c. *Pag 261. in 4.

La seconde est lorsque nous en considérons seulement les parties intégrantes, ou les principes dont ces corps sont composez. Il m'a toujours paru que les corps pris dans la premiére considération sont dans leur derniere perfection, particulierement les corps organisez, comme sont tous les animaux & toutes les plantes, & que pour lors ils ne changent par le frapement de la matiere de la lumiere, que pour redevenir peu à peu des matieres simples ou des principes dont ils avoient été composez; ce qui arrive toujours en plus ou moins de tems que la matiere de la lumiere les frape plus ou moins fortement: mais en considérant seulement les parties dont ces corps sont composez, ils reçoivent continuellement les impressions de la matiere de la lumiere qui les change différemment selon que cette matiere s'y attache en plus ou en moins de quantité, & qu'elle s'y attache superficiellement, ou qu'elle entre dans la substance même de ces principes, ce qui leur donne une forme nouvelle, comme nous l'avons remarqué fort sensiblement dans l'observation que nous avons rapportée dans nôtre dernier Mémoire sur le mercure, dont une partie s'est changée en poudre par la simple coction qui

pesoit plus qu'elle ne faisoit avant que d'avoir été mise sur le feu, mais qui s'est remise en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu. L'autre partie de ce mercure s'est fixée tout à fait par une plus forte & plus longue coction en un corps solide & métallique, qui ne s'est plus remis en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu, la matiere de la lumiere ne s'étant arrêtée que superficiellement au premier, & étant entrée dans la substance même de ce dernier mercure. L'application de ce raisonnement au fait que nous avons vû dans ce mercure, nous fera concevoir de quelle maniére ce changement lui est arrivé, & quelle sorte de matiere sulphureuse en a été produite; ce qui nous donnera en même tems un moyen d'expliquer facilement la * production de toutes les autres matieres sulphureuses. Nous supposons d'abord que les parties du mercure sont de petites goutes fort menues, ou de petits grains ronds & polis, qui glissent fort aisément les uns sur les autres, ce qui fait sa fluidité; la matiere de la lumiere poussée violemment par le moyen de la flame & pendant long-tems contre ces petits grains qui font la partie solide du mercure, elle hache & en dérange peu à peu la superficie, & s'y introduit; & comme elle ne trouve pas un passage aisé pour la traverser, elle y demeure attachée superficiellement, & y produit de petites éminences qui rendent la superficie de ces petits grains raboteuse ou herissée de ronde & de polie qu'elle étoit; car il faut s'imaginer ces grains de mercure comme lardez de matiere de lumiere, dont les petites éminences corrompent sensiblement le poli de ces petits grains; ce qui est d'au-

* Pag. 262. in 4.

d'autant plus aisé à accorder, que les petits grains de mercure sont plus petits qu'il ne faut pour être apperçûs par les yeux, même armez d'un microscope, & plus petits que les parties de l'air, parceque le mercure passe par des endroits où l'air ne passe pas; ainsi quelque petite que soit la matiere de la lumiere lorsqu'elle s'arrête dans la superficie des parties du mercure, elle en doit changer sensiblement la figure.

Les parties du mercure étant aussi devenues herissées par le lardement de la matiere de la lumiere, nous pouvons nous les représenter comme des chataignes couvertes de leurs coques vertes & herissées, qui se soûtiennent plutôt les unes les autres que de couler sur un plan incliné, comme elles feroient si c'étoit des boules rondes & polies; & dans cet état le mercure n'est plus fluide, étant changé en une poudre rouge, dont les petits grains collez les uns contre les autres par leurs propres herissons, composent de gros morceaux assez durs & de figures irrégulieres, comme feroient les coques herissées des chataignes si on les pressoit les unes contre les autres, qui composeroient de gros pelotons de figure irréguliere, & qui tiendroient fort bien ensemble: Ces pointes herissées du* mercure par la longueur du tems qu'on les expose au feu s'augmentant en nombre & en grandeur, s'entrelassent & se soûtiennent si fort que le mercure devient dur comme une pierre; & comme ces pointes qui rendent chaque grain du mercure herissé sont une matiere sensible & pesante, le mercure dans cét état augmente de volume, & pese plus qu'il ne faisoit avant que d'avoir été mis au feu, & lorsqu'il étoit encore coulant.

*Pag. 263. in 4.

Si on broye ce mercure avec du nouveau mercure coulant, il s'en fait un amalgame comme si c'étoit un métal; & en le remettant pendant long-tems à un feu plus violent, la matiere de la lumiere qui s'étoit attachée seulement sur la superficie des petits grains du mercure dans le premier feu, commence au plus grand feu de pénétrer plus avant dans la substance même de ces petits grains. Si on broye ce mercure plusieurs fois avec du nouveau mercure coulant, la matiere de la lumiere pénétrera par la forte cuisson si avant dans les petits grains du mercure, qu'en l'exposant au feu de fonte, il en restera une partie en forme de métal, qui ne changera plus sensiblement à quel degré de feu qu'on le mette.

Dans les premiéres digestions la matiere de la lumiere ne s'attache que superficiellement aux petits grains du mercure, & les envelope peu à peu entierement: elle continue ensuite de fraper ces grains envelopez, & ne pouvant pas toucher en cet état le mercure à nud, mais seulement son envelope, elle ne fait plus d'impression sensible sur le mercure; ensorte qu'on pourroit le tenir pendant plusieurs années en digestion, sans qu'il changeat pour cela en aucune maniére: mais en broyant ce mercure digeré & qui est devenu poudre par la simple cuisson, on brise toutes les envelopes des petits grains du mercure, qui par-là se présentent nuds à la matiere de la lumiere que le feu de la seconde digestion y peut pousser; & comme la premiére digestion n'a pas laissé d'entamer la superficie de ces petits grains & d'y faire une espece de hachure, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la * seconde digestion pousse

* Pag. 264 n 4.

ces hachures un peu plus avant, & ensuite envelope encore les grains du mercure: le second broyement dépouillera ces petits grains de leur seconde envelope, & une troisiéme digestion enfoncera encore plus avant ces hachures dans les petits grains ou dans la partie solide du mercure, jusqu'à ce qu'en réiterant ceci plusieurs fois, les petites hachures deviennent assez profondes poür que la matiere de la lumiere s'y puisse loger entierement; & pour lors la flame étant trop grossiere pour entrer dans ces petites logettes, elle ne fait que passer par dessus, & la matiere de la lumiere reste noyée dans ces logettes, sans qu'aucune autre matiere l'en puisse faire sortir, à moins qu'elle ne fût aussi petite & même plus petite que la matiere de la lumiere: le mercure dans cet état est devenu métal, & la flame n'a plus de pouvoir sur lui; & comme il n'y a aucun corps qui soit plus petit que la matiere de la lumiere, pour arracher celle qui s'est logée dans la partie solide du mercure, ce qui seroit détruire le métal, il reste impunément dans le plus grand feu: mais en l'exposant à un poussement très violent de la matiere de la lumiere par les rayons concentrez du verre ardent, celle qui s'étoit logée dans le mercure s'enfonce davantage & le traverse, comme un clou est chassé par un autre, la substance solide du mercure devient criblée & poreuse, qui préte un passage libre à la matiere de la lumiere, & pour lors il n'est plus métal, ni même du mercure, mais une matiere terreuse & legere, comme nous avons remarqué dans nos observations sur le verre ardent.

La matiere de la lumiere qui s'est introduite

& attachée au corps du mercure, est à son égard une matiere étrangere, laquelle considerée seule & avant que d'être attachée au mercure, est une matiere non encore déterminée, que nous avons appellée nôtre souffre principe: mais après s'être introduite & attachée au mercure, elle se détermine souffre métallique, & demeure telle pendant tout le tems qu'elle sera attachée au mercure; & si par quelque operation on la détachoit du mercure, & qu'on * l'introduisit dans quelqu'autre corps qui ne fût pas mercuriel: ce souffre métallique changeroit de nature & de nom, & deviendroit un souffre vegetal, animal ou bitumineux, selon la nature du corps auquel il se joindroit, ces transformations se pouvant faire fort aisément, comme nous le verrons ci-après.

* Pag. 265. in 4.

Nous appellons souffre métallique la matiere de la lumiere, ou nôtre souffre principe lorsqu'il s'est joint ou attaché au mercure, ou à quelqu'autre corps mercuriel que ce soit. Nous l'appellons souffre vegetal lorsqu'il s'est introduit à demeurer dans quelque matiere vegetale. Nous l'appellons souffre animal lorsqu'il s'est attaché & uni à quelque partie animale; & nous l'appellons souffre bitumineux lorsqu'il s'est uni à quelque matiere simplement terreuse.

Je ne connois que ces quatre differentes matieres sulphureuses, & encore pourroit-on les distribuer en trois classes seulement; parceque le souffre vegetal & le souffre animal se ressemblent si fort, que l'on pourroit n'en faire qu'une seule classe. Nous ne laisserons pas cependant de les diviser pour avoir des distinctions plus précises dans le raisonnement.

L'union du souffre principe aux matieres animales, vegetales, mercurielles & terreuses pour produire les différens souffres, se peut faire immédiatement par le poussement du Soleil & par le feu, ou médiatement par la transposition d'une matiere sulphureuse, d'un certain genre dans le corps d'un autre genre; par exemple, l'huile d'olive qui est un souffre vegetal, faisant partie de la nourriture de quelque animal, peut devenir de la graisse de cet animal, qui est un souffre animal; & la racine d'une plante suçant la matiere graisseuse du fumier, qui est un souffre animal, se changera en une huile vegetale dans la plante, & ainsi des autres.

Les transpositions des matieres sulphureuses d'un genre à un autre sont aisées à faire lorsque les souffres sont volatils; mais quand c'est un souffre fixe, il est très-difficile de * le changer d'un corps à un autre. Nous appellons une matiere fixe, lorsqu'étant mise au feu elle y reste sans être enlevée par la flame. Nous appellons une matiere volatile, lorsqu'elle ne peut pas supporter la violence du feu; & celle-là est plus ou moins volatile, selon qu'elle est enlevée par un degré de feu plus ou moins violent. La maniére comment le feu ou la flame enleve les matieres volatiles, & comment elle laisse les matieres fixes, a été expliquée dans l'article 2. de ces Essais.

* Pag. 266. in 4.

Toutes les matieres sulphureuses animales, vegetales & bitumineuses sont volatiles; mais les métalliques sont en partie fixes, en partie volatiles. Dans l'or & dans l'argent il n'y a que du souffre métallique fixe, parceque la flame ne sçauroit enlever ces métaux ni en séparer le souffre. Je ne parle ici que de la flame seulement,

ment, qui eſt le feu connu dans nos laboratoires, & non pas des rayons du Soleil concentrez par le verre ardent, qui enlevent auſſi bien l'or & l'argent que les autres métaux, & à l'égard deſquels il n'y a rien de fixe; car la matiere de la lumiere heurte par cette concentration avec une violence extrême contre la partie ſolide des corps, & elle la pénétre promptement, mais c'eſt en la briſant & en la détruiſant; & alors bien loin de compoſer un nouveau mixte, elle réduit ce corps dans les principes les plus prochains dont il étoit compoſé; & ſi on continue à expoſer ces principes au même feu, ils ſont encore diviſez en principes plus ſimples dont ces premiers étoient compoſez, ce qui n'arrive jamais au feu de la flame.

Je dis donc que nous ne connoiſſons de ſouffre fixe que celui qui ſoûtient les efforts de la flame, & qui n'eſt que d'une ſeule ſorte; ſçavoir, le ſouffre métallique fixe, qui ſe trouve pur dans l'or & dans l'argent, & mêlé de differens ſouffres volatils dans les autres métaux, qui ne laiſſent pas d'être métalliques quoique volatils, parcequ'ils ſont propres à ces métaux, & cependant différens dans chacun d'entr'eux.

Nous appellons encore ſouffre métallique volatil celui * qui s'attache ſuperficiellement au mercure par les longues digeſtions, parceque le grand feu l'en ſépare: mais ſi par une plus longue ou par une plus forte cuiſſon, ou par quelqu'autre induſtrie ce ſouffre volatil a pénétré juſques dans l'interieur & dans la ſubſtance même du mercure; alors il ne peut plus être enlevé par la flame, le mercure devient métal, & ſon ſouffre volatil ſe change en ſouffre fixe métallique,

* Pag. 267. in 4.

que, ensorte que la différence du mercure qui est devenu métal, & celui qui a été précipité seulement par lui même, consiste en ce que dans ce dernier la matiere de la lumiere s'est attachée superficiellement aux petits grains du mercure, ou elle s'est changée en un souffre métallique volatil, qui s'en sépare fort aisément par le feu, en remettant le mercure dans sa premiere forme liquide: mais quand le mercure est devenu métal, la matiére de la lumiere a pénétré dans la substance même du mercure, & par-là elle est devenue un souffre fixe métallique qui ne quitte plus le mercure quelque grand feu qu'on lui donne, le conservant toujours dans la forme de métal; & selon la quantité du souffre fixe qui s'y est arrêté, le métal est plus ou moins pesant, c'est à dire, est or ou argent. De sorte que la seule différence qu'il y a entre l'or & l'argent, est que l'un est du mercure qui dans son interieur contient beaucoup de souffre métallique fixe, c'est-à-dire en plus grande quantité qu'il ne lui en faut pour être simplement métal; & que l'autre est du mercure qui dans son interieur contient peu de souffre métallique fixe, c'est-à-dire autant seulement qu'il lui en faut pour devenir métal.

Nous voions par-là que les parties qui composent l'or & l'argent ne sont que du mercure & du souffre fixe, ce qui est une composition fort simple; au lieu que la substance des autres métaux consiste en un assemblage de plusieurs matieres, dont la base néanmoins est du mercure avec très-peu de souffre métallique fixe, mais qui sont accompagnez de différens souffres métalliques volatils, des souffres bitumineux, des différentes terres & des matieres * salines, qui

* Pag. 268 in 4.

 sont

font des compositions très-composées, dont les parties de différentes configurations ne pouvant pas se joindre fort étroitement, sont par conséquent de peu de durée dans le feu, & dont la production artificielle seroit d'autant plus difficile que celle de l'or & de l'argent, que la composition des uns est plus simple que celle des autres.

Nous avons vû que les souffres métalliques fixes ou volatils ne sont que la matiere de la lumiere jointe plus ou moins étroitement au mercure; mais tous les autres souffres sont des compositions beaucoup plus amples. J'ai fait les analyses du souffre commun, du Petrole, du souffre de *Quito*, du Jayet, des charbons de terre & des différens succins, qui sont les souffres bitumineux les plus connus; j'y ai toujours trouvé beaucoup de terre, beaucoup de sel volatil acide, une quantité considérable de matiere acqueuse, & une huile très-pénétrante, laquelle aiant été analysée encore, s'est réduite en beaucoup d'eau, en un peu de terre & en un peu d'huile, laquelle par plusieurs operations réiterées s'est enfin tout à fait dissipée, laissant à chaque fois un peu des autres principes dont ces huiles étoient composées: le souffre principe, ou la matiere de la lumiere qui étoit entrée dans la composition de ces souffres, se perdant à la fin entierement par les analyses, comme une matiere qui cesse de nous être palpable & sensible quand elle est dégagée des autres principes plus materiels, comme nous l'avons remarqué dans le commencement de cet article.

J'ai fait aussi les analyses des huiles distillées essentielles & fœtides des plantes, de leurs graisse

ses & huiles exprimées, & de différens sucs résineux, qui sont des matieres sulphureuses vegetales. J'ai fait aussi les analyses de différentes parties des animaux qui contiennent les matieres sulphureuses animales, dont les operations souvent réiterées ont entierement divisé les huiles en beaucoup d'eau, en sel & en terre comme dans les matieres bitumineuses, perdant pareillement & par les mêmes raisons leur souffre * principe dans toutes ces operations analytiques; ensorte que les matieres sulphureuses tant animales & vegetales que bitumineuses, sont toujours composées de quatre matieres, sçavoir, d'eau, de sel, de terre & de souffre principe, au lieu que le souffre métallique n'est composé que de deux matieres seulement, sçavoir, de mercure & de souffre principe, à moins qu'on ne vueille dire que le mercure soit aussi composé de matieres plus simples, ce que nous n'avons pas encore pu découvrir, & comme nous avons remarqué dans les métaux que les plus simples sont les plus parfaits, nous pourrions bien dire aussi que parmi les souffres les plus simples sont les plus parfaits & les moins alterables, ce que les expériences confirment; car la flame qui détruit tous les autres souffres, ne sçauroit faire aucune impression sensible sur le souffre métallique fixe: mais si la fixité du souffre métallique & son peu de sujétion au changement est une perfection en soi, ce doit être un défaut à l'égard de nous; car la facilité de changer & de dissoudre les autres souffres nous les rend familiers & utiles, tant pour nos nourritures que pour nos remedes, au lieu que le souffre fixe est encore tout a fait inabordable à la plûpart des hommes, même

* Pag. 269. in 4.

aux plus ſçavans Phyſiciens, ce qui eſt un très-grand dommage pour la matiere médicale.

L'introduction de la matiere de la lumiere dans les autres principes, dont les vegetaux, les animaux & les bitumes ſont compoſez, eſt à peu près la même que celle qui ſe fait dans le mercure: mais comme les parties de ces autres principes ne ſont pas ſi fines ni ſi compactes ou ſolides que celles du mercure, la matiere de la lumiere les pénétre plus aiſément & en moins de tems; mais elle ne s'y joint pas ſi étroitement qu'au mercure, à peu prés comme un clou eſt fort aiſément enfoncé dans une pomme ou dans une citrouille, & beaucoup plus difficilement dans un ais de chêne: mais auſſi quand le clou y a été une fois enfoncé à coups de marteau, il en eſt difficilement retiré, au lieu qu'on le retire ſans peine de la pomme ou * de la citrouille; ce qui fait que toutes ces matieres ſulphureuſes-là ſont non ſeulement volatiles, mais auſſi fort aiſément détruiſibles par le feu, c'eſt-à-dire que la matiere de la lumiere s'en ſépare ſans beaucoup de peine, laiſſant les autres principes dans le même état qu'ils étoient avant que de les avoir pénétré.

* Pag. 270. in 4.

Les ſels reçoivent avec beaucoup d'avidité les ſouffres, mais c'eſt ſans les changer de nature, en quoi leur tranſpoſition eſt différente de celles dont nous venons de parler, c'eſt-à-dire qu'un ſouffre animal, par exemple, tranſplanté dans une matiere ſaline n'eſt pas changé en un ſouffre bitumineux ou autre, il demeure le même, mais il caracteriſe le ſel auquel il ſe joint; & comme les ſouffres volatils changent aiſément de nature, ſi par quelque accident le ſouffre, par exemple, qui aura caracteriſé le

sel commun, se peut changer en celui qui caracterise le salpetre, le sel commun deviendra salpetre, & ainsi des autres; ensorte que la difference des sels ne consiste que dans les différens souffres qui les accompagnent. Nous en avons parlé amplement dans l'article du sel principe.

Toutes les matieres sulphureuses bitumineuses, vegetales & animales sont inflammables; ce qui a donné occasion à la fausse idée, que ces matieres ne sont sulphureuses, que parce qu'elles sont inflammables: mais quand on considérera que parmi ces matieres il y en a qui sont plus inflammables les unes que les autres, & qu'elles le sont plus ou moins selon que dans leur composition il est entré plus ou moins de sel acide, nous comprendrons aisément que l'inflammabilité n'est pas le caractere du souffre, mais du mêlange d'une matiere huileuse quelconque avec un sel acide; ce qui se prouve sensiblement par la composition des matieres résineuses artificielles. Par exemple, mêlez de l'huile de giroffle avec de l'esprit de nitre dans les forces & dans les doses requises, il en résultera une résine qui sera incomparablement plus inflammable que n'étoit l'huile de giroffle, où l'esprit de nitre dont cette resine est composée; cette grande imflammabilité ne provient * donc pas de l'une de ces deux matieres séparément prise, mais de leur mêlange.

* Pag. 272. in 4.

La décomposition des matieres simples fort inflammables nous confirme la même chose, le souffre commun prend feu ou s'enflamme à l'approche d'une petite étincelle de feu: mais quand on en a séparé la partie acide, comme je l'ai montré dans nos Mémoires de l'an-

l'année 1703. † la partie huileuse qui reste dépouillée de son acide, ne brule plus, même quand on la met dans la flâme d'une chandelle, elle ne fait que petiller, & pour la faire bruler il la faut mettre sur des charbons fort ardens. Le phosphore de l'urine est de toutes les matieres inflammables celle qui s'enflamme le plus aisément, puisqu'elle prend feu par un simple frotement très-leger : mais quand on en fait l'analyse, on trouve qu'il se sépare en une liqueur aqueuse très acide, comme feroit l'esprit de vitriol, & en une matiere terreuse jaunâtre & un peu grasse, dont la premiére n'est point du tout inflammable, & la seconde ne brule qu'avec peine. La plûpart des matieres sulphureuses métalliques, même des volatiles, ne sont point du tout inflammables; de sorte que la proposition seroit bien vraie de dire que toutes les matieres inflammables sont sulphureuses, mais non pas celle que toutes les matieres sulphureuses sont inflammables.

Nous avons remarqué que tous les souffres non métalliques, comme la graisse, le sang & la moëlle dans les animaux, les huiles, les gommes & les résines dans les plantes, &c. sont composez de sel, d'eau, de terre & d'huile: mais quand on considérera que toutes les autres parties des animaux, des plantes & des bitumes sont pareillement composez de ces mêmes quatre matieres-là, ce sera un surcroit de preuve que le souffre est le seul principe actif qui se trouve dans tous ces trois genres de corps, puisque la matiere huileuse, qui en est le souffre particulier, non seulement se trou-

ve

† Pag. 36. & suiv. Sec. Edit. pag. 38.

ve dans toutes les parties des animaux, des vegetaux & des bitumes, mais aussi que la matiere huileuse elle-même comprend ces autres trois principes & en * est composée, ce que l'on ne sçauroit dire des autres principes. Cette composition peut être variée infiniment; car la substance d'un corps composé ne consistant que dans l'assemblage des matieres dont il est composé, si l'on change cet assemblage, ou en rangeant les parties autrement, ou en augmentant quelques unes de ces parties, dont la combinaison est infinie, il est constant que le changement de la substance de ces corps pourra être infini aussi.

* Pag. 272. in 4.

La matiere de la lumiere, en produisant les matieres sulphureuses, s'introduit dans la substance des corps, en change l'arrangement des parties & les augmente, & par conséquent elle change la substance même de ces corps en autant de façons qu'elle se peut différemment placer & en différente quantité, ce qui fait une varieté infinie; de sorte que si on vouloit comparer la varieté des matieres qui existent à celle qui pourroit être par toutes les combinaisons possibles, nous serions obligez de dire, que l'Univers connu n'est que très-peu de chose en comparaison de ce qu'il pourroit être, & même s'il y avoit plusieurs Mondes comme le nôtre, ils pourroient être tous différemment garnis d'objets sans changer la matiere, ni la maniére dont ces objets seroient composez; ce qui marque une richesse & une puissance infinie de l'Etre qui a produit l'Univers.

DU

DU MIEL
ET
SON ANALYSE CHIMIQUE.

Par M. LEMERY.

† IL n'eſt pas néceſſaire que je traite ici de l'origine du Miel: tout le monde ſçait aſſez que c'eſt une ſubſtance ſucrine que les Abeilles ramaſſent des fleurs de diverſes * plantes, & qu'elles portent dans leur ruche pour leur nourriture & pour celle de leurs petites mouches. Cette ſubſtance ſucrine ou miellée ſe manifeſte aſſez au goût dans pluſieurs eſpeces de fleurs; comme dans celles du trefle des prez, dans celles des roſes, des œillets; car ſi on les léche principalement vers la partie d'embas, qu'on appelle onglets, & qui eſt contenue dans le calice, on ſentira un goût doux & agréable. Cette ſubſtance reçoit dans l'Abeille & dans la ruche une élaboration qui la perfectionne & la réduit en miel.

*Pag. 273. in 4.

Pluſieurs choſes contribuent à faire de bon miel, comme la chaleur & la pureté de l'air, la bonté des Abeilles, la nature des plantes qu'elles ont léchées, l'adreſſe des Ouvriers qui y travaillent.

On retire le miel des ruches en deux ſaiſons, au Printemps & en Automne. Il me paroît que la premiére eſt la plus convenable, parceque c'eſt le tems où les Abeilles ſont dans leur

plus

† 10. Juillet. 1706.

plus grande vigueur; qu'elles vont humer & succer les rosées qui tombent abondamment aux mois d'Avril & de Mai, & que la substance des plantes est plus pure dans le renouvellement de la chaleur.

La meilleure maniére de separer le miel, est de mettre les tablettes ou gateaux qu'on a retirez des ruches sur des clayes ou nattes d'osier. Il en coule un beau miel blanc excellent qui se congele: on l'appelle Miel vierge.

On tire encore du miel blanc des gateaux qui restent sur les clayes d'osier, en les mettant à la presse dans des sacs de corde: mais il n'est pas si bon ni si blanc que le premier, tant à cause de la cire qui y donne une legere impression des mouches vives ou mortes, & même des vers gros & blancs qui s'engendrent quelquefois dans les ruches, & qui y portent un grand préjudice si l'on n'y remedie; car on observe que quand ces insectes se sont rencontrez dans le miel qu'on a exprimé, il ne se congele pas bien, à cause du vilain suc qui y est entré: le goût en est moins agréable, & il se garde difficilement sans s'aigrir & se corrompre.

* Le miel jaune est tiré de toutes sortes de gateaux vieux & nouveaux qu'on a retirez des ruches: on les rompt, on les met dans des chaudieres, on y mêle un peu d'eau, & on les fait chauffer; puis les aiant envelopez dans des sacs de toile, on les met à la presse pour en faire sortir le miel: la cire demeure dans les sacs.

* Pag. 274. in 4.

Plusieurs Cantons du *Languedoc* & du *Dauphiné* fournissent le meilleur miel blanc que nous ayons en *France*: mais le plus estimé & le plus recherché de tous, est celui qu'on fait en

en un petit Bourg nommé *la Corbiere*, situé à trois lieues de *Narbonne* : c'est celui que nous appellons miel de *Narbonne*. L'excellence de ce miel, à ce qu'on prétend, vient des Romarins qui sont abondans & très-communs dans cette contrée, & dont les Abeilles succent les fleurs; néanmoins je remarquai en une année que je demeurai au *Languedoc*, qu'encore que la gelée qui y fut grande & extraordinaire l'hyver, eut fait perir presque tous les Romarins, le miel qu'on recueillit au Printems suivant ne ceda point en agrément ni en bonne qualité aux miels qui avoient été tirez les années précédentes.

Pour le miel jaune nous en voyons de plusieurs sortes qui différent dans leur consistance, dans leur couleur plus ou moins foncée, dans leur odeur & dans leur goût. Celui qui se tira de *Champagne* est le meilleur; il doit être nouveau, de consistance assez ferme, grenu, de couleur jaune dorée, d'un goût agreable. Les miels qui viennent de la *Touraine* & de *Picardie* sont moins bons; ils sont écumeux, mal liez, & souvent d'une consistance trop liquide, de couleur jaune assez foncée, sentant un peu la cire, & d'un goût moins agreable que celui du miel de *Champagne*. Le miel qui se fait en *Normandie* est le moins bon de tous, & le plus mal préparée : sa consistance est quelquefois assez solide, & souvent trop liquide : sa couleur est rougeâtre, son odeur est desagréable, il a un goût de cire.

Ces différentes qualitez de miels ne viennent pas tant de la temperature du climat, que de la bonne ou mauvaise * manœuvre des Ouvriers. Ceux de *Normandie* mettent trop d'eau dans leurs

* Pag. 275. in 4.

leurs gâteaux, & ils sont obligez ensuite d'en faire consumer une partie; c'est peut-être ce qui rend leur miel rougeâtre. Ils en séparent mal la cire par les pressoirs, ce qui fait qu'il a un goût de cire: ce n'est pourtant pas leur profit, car la cire est bien plus chere que le miel.

Le miel est en usage dans quelques alimens & dans les remedes; mais il l'étoit beaucoup davantage avant qu'on eut trouvé l'invention du sucre. Les Anciens en assaisonnoient leurs ragouts, & ils l'emploioient pour leurs confitures, comme quand ils préparoient leur *Melimelum*, qui étoit du coing ou une autre pomme confite dans du miel. On en servoit sur leurs tables. Ils s'en servoient pour leurs syrops & pour leurs autres compositions médecinales, comme nous nous servons du sucre. Ils en composoient diverses sortes de boissons, comme de l'Hydromel qu'ils appelloient aussi *Melicratum*, *Aqua mulsa*, *Apomeli*. Nous nous servons souvent pour la délicatesse du goût à la place de cet Hydromel, de l'eau sucrée.

Ils beuvoient du vin miellé qu'ils appelloient *Oenomeli*. Nous nous servons à sa place du vin sucré, de l'Hypocras.

Ils beuvoient aussi de l'Oxymel: c'étoit un mêlange de miel & de vinaigre qu'ils temperoient avec beaucoup d'eau pour se rafraîchir. Nous nous servons à sa place du syrop aceteux, du syrop de limons, ou des autres syrops aigres, & nous n'emploions plus guere ces liqueurs miellées que pour les remedes.

Au reste le miel est souvent préferable au sucre, quand on n'a point tout-à-fait égard à la délicatesse du goût; car outre que c'est un ramas

mas de la substance la plus pure & la plus éthe-rée d'une infinité de fleurs qui possedent de grandes vertus, il est plus balsamique, plus pectoral & plus anodin que le sucre, qui n'est que le suc purifié & épaissi du seul roseau.

Le miel devient amer par une trop forte coction, de même que les autres choses douces: il s'enflamme au feu à peu près comme le sucre.

* Pag. 276. in 4. * Les Abeilles sauvages font sur les rochers de gros amas de miel qui ne servent ordinairement que pour la nourriture des mouches & des oiseaux. Plusieurs croient avec assez de vraisemblance que l'Ambre gris en provient; mais ce n'est pas dont il s'agit présentement.

Analyse du Miel.

J'ai mis en distillation au bain-Marie dans une grande cucurbite de grez trente-deux onces du plus excellent miel de *Narbonne* que j'aie pu trouver. J'en ai eu six onces d'une eau claire comme de l'eau commune. J'en aurois tiré davantage si j'avois continué la distillation; mais je ne voulois que la premiére eau qu'on appelle Rosée de miel. Elle a l'odeur du miel, elle est insipide; cependant elle contient un acide, car elle a rougi le tournesol. Elle n'a fait aucune ébulition avec l'huile de tartre, ni avec l'esprit volatil de sel armoniac. Cette rosée de miel est estimée propre pour faire perdre le lait aux Nourrices, pour exciter l'urine, pour aider à la respiration. On en prend trois ou quatre onces à la dose, deux ou trois fois par jour.

J'ai retiré la cucurbite du bain Marie, & je l'ai placée au bain de sable où j'ai continué la dis-

distillation par un feu mediocre. Le miel s'est beaucoup gonflé, & il a rendu quatre onces d'une seconde eau claire, de couleur jaune, d'une odeur de miel assez agréable, d'un goût acide & acre, sentant un peu le feu. Elle a donné au tournesol une belle couleur rouge foncée.

J'ai poussé le feu un peu plus fort sous le miel, il s'en est élevé beaucoup de fumées blanches qui ont rempli de nuages le chapiteau & le recipient, & elles se sont résoutes en une troisiéme eau qu'on appelle Esprit de miel, pesant trois onces, de couleur rouge, d'une odeur de brulé, mais agréable, & d'un goût acide fort acre, pénétrant & brulant un peu la bouche. Elle a bouillonné avec les alkali: elle a donné au tournesol, comme la précédente, une belle couleur rouge foncée.

* J'ai augmenté fortement le feu sous la cucurbite, & je l'ai continué jusqu'à ce qu'il ne parût plus de nuages dans le chapiteau. Il a distillé une quatriéme eau pesant deux onces, aiant une odeur semblable à la précédente, de couleur orangée, d'un goût acide accompagné d'acreté, mais moindre qu'en la troisiéme eau, ce qui m'a paru étonnant; car ces liqueurs devroient être de plus en plus acres à mesure qu'elles approchent de la fin de la distillation: c'est apparemment que cette derniere est plus empreinte de parties huileuses que l'autre, car l'huile adoucit & tempere l'acreté des sels. Elle a bouillonné avec les liqueurs alkalines, & elle a rougi le tournesol.

* Pag. 277. in 4.

J'ai trouvé dans la cucurbite une masse très-rarefiée, legere, noire, pesant quinze onces & demie; je l'ai remise en distillation dans une

cor-

cornue, & j'en ai encore tiré par un grand feu sept onces d'une liqueur rouge brune, teignant fortement les doigts en couleur orangée, d'une odeur forte de brulé, mais qui n'est pas beaucoup desagréable, d'un goût acide, acre & piquant, & deux dragmes d'huile épaisse & noire comme de la poix, d'un goût acre. Cette acreté procede d'une portion de sel qui s'y est attachée. Le miel doit contenir beaucoup plus d'huile qu'il ne s'en est separé par les distillations; mais il en demeure toujours une bonne partie dans les dernieres liqueurs distillées: car si on les laisse reposer quelques jours, il s'en précipite un peu au fond du vaisseau, & il s'en attache aux côtez. Elle est estimée bonne pour la carie des os.

J'ai rectifié la liqueur rouge-brune derniere distillée, elle est fort claire, mais sa couleur tire un peu sur le jaune: son odeur est desagréable, & son goût a un peu diminué en acreté: C'est ce qu'on appelle Esprit ou aigre de miel rectifié.

J'ai retiré de la cornue sept onces & six dragmes d'une espece de charbon noir, rarefié, terrestre, presqu'insipide, mais marquant pourtant au goût, quand on l'a mâché, quelque legere impression de sel. J'en parlerai encore dans la suite.

* Pag. 278. in 4 * On voit par ces distillations que trente-deux onces de miel de *Narbonne* rendent vingt-quatre onces & deux dragmes de liqueur. Je n'en ai à la verité tiré que vingt-deux onces & six dragmes, mais le reste s'est dissipé par les jointures des vaisseaux; car quelque exactitude qu'on apporte dans ces operations, il s'en perd toujours.

Je

Je ne me suis par contenté d'avoir fait l'analyse du miel blanc le plus pur tiré de la ruche sans expression, j'ai fait celle du second miel tiré par une legere expression. Il étoit de bonne consistance, assez ferme, de couleur blanche tirant sur le jaune, d'assez bonne odeur, d'un goût agreable; je l'ai fait distiller au même poids comme le précédent, j'en ai tiré les mêmes principes: mais les premieres eaux m'ont semblé moins odorantes que celles du miel de *Narbonne*, & il y en a eu sur le total demie-once moins. Il m'est resté dans la cornue huit onces & deux dragmes de charbon semblable au précédent, mais un peu plus noir. Cette derniere distillation fait voir que le miel pour peu qu'il ait été exprimé au sortir de la ruche, contient plus de terre que celui qui a été fait sans expression.

J'ai fait encore l'analyse du miel de *Champagne*; il étoit de bonne consistance, de couleur jaune, d'une odeur fade, d'un goût moins agréable que celui des miels dont j'ai parlé. J'en ai mis trente-deux onces en distillation: les premieres eaux que j'en ai tiré ont une odeur miellée un peu plus foible que celle des précédentes; mais les derniers qu'on appelle Esprit de miel, m'ont paru tant soit peu plus acres, & elles ont été moins abondantes, car je n'en ai tiré en tout que vingt-deux onces & demie. J'ai trouvé dans le chapiteau après la distillation, outre une petite quantité d'huile noire & épaisse, un morceau de cire jaune pesant deux dragmes, aussi dure & aussi parfaite qu'aucune autre. Cette cire avoit passé avec le miel quand on avoit pressé les gateaux, & s'y étoit tenue dissoute, le feu l'a fait séparer & élever avec l'esprit.

J'ai

J'ai trouvé dans la cornuë après la derniere distillation neuf onces d'un charbon rarefié
* Pag. 279. in 4. semblable aux précédens. * Ce miel commun de *Champagne* a donc contenu plus de terre que le miel blanc; ce qui vient de l'expression plus forte qu'on en a faite au sortir de la ruche.

J'ai fait encore l'analyse du miel de *Normandie*; il étoit de consistance assez ferme, de couleur jaune rougeâtre, d'une odeur & d'un goût moins agréable que les autres. J'en ai donc mis en distillation trente-deux onces, il en est sorti des liqueurs pareilles à celles que j'ai tirées du miel de *Champagne*, & j'ai trouvé au chapiteau un morceau de cire pesant trois dragmes: il m'est resté dans la cornuë neuf onces de charbon rarefié comme aux distillations précédentes.

J'ai ramassé tous les charbons de miel qui sont sortis des cornuës après les distillations dont j'ai parlé, j'en ai mêlé avec des acides les plus forts, ils n'ont point fermenté.

J'ai mis calciner à grand feu trois livres & demie ou cinquante-six onces de ces charbons de miel dans un pot de terre simple sans vernissure pendant dix heures: cette matiere s'est allumée comme le charbon ordinaire, mais elle ne s'est point reduite en cendres; elle n'a diminué que de dix onces, & elle est restée noire & en charbon: elle a pris un goût un peu salé. J'ai versé sur une portion de cette matiere une liqueur acide, il s'y est fait effervescence. J'ai mis le reste tremper dans de l'eau pour en faire une lessive, le mêlange a bouillonné comme quand on éteint de la chaux. J'ai filtré la liqueur, & je l'ai mise évaporer, il ne m'est

m'eſt reſté qu'une dragme & demie d'un ſel alkali acre & piquant au goût. Il a fermenté avec les acides, & il a troublé la diſſolution du ſublimé. Il eſt aperitif, fondant & réſolutif comme les autres ſels alkali fixes, lexiviels. On en peut donner juſqu'à deux ſcrupules à la doſe.

J'ai fais ſecher dans une terrine qui n'étoit point verniſſée la cendre ou plutôt le charbon de miel reſté après la leſſive, il eſt demeuré inſipide, & il n'a plus été alkali. Je l'ai remis calciner, il a pris feu & il a rougi, mais il ne s'eſt point réduit en cendres, quoique le feu que j'y ai * emploié ait été fort grand. Il n'eſt point non plus revenu alkali, & je n'en ai pu tirer de ſel par une nouvelle leſſive que j'en ai faite. Je l'ai mis ſecher exactement comme devant, & j'ai fait ſur cette matiere une expérience qui m'a paru ſurprenante, & qui merite d'être rapportée ici.

* Pag. 280. in 4.

J'ai mis ſur un papier une portion de ce charbon de miel écraſé en poudre groſſiere, j'en ai approché un couteau aimanté, j'ai apperçû que beaucoup de particules du charbon ſe ſont auſſi-tôt hériſſées, ont été attirées par le couteau, & s'y ſont attachées tout de même que la limaille de fer eſt attirée par l'aimant & s'y attache.

Cette expérience montre que le charbon de miel contient du fer; car juſqu'à preſent il ne nous a point paru de matiere autre que le fer qui fût attirée par l'aimant. Au reſte je puis aſſurer que toutes mes operations ſur les miels ont été faites dans des vaiſſeaux de terre ou de verre, ſans qu'il y ait eu communication du fer, ni même d'aucun autre métal. Le charbon de

miel avant qu'il eut été calciné & dépouillé de son sel, étoit aussi attiré par l'aimant, mais moins bien ou en plus petite quantité.

Cette expérience confirme celles que M. *Geoffroy* a rapportées à la Compagnie touchant le fer qu'il assure avoir trouvé dans les cendres de différens vegetaux. Mais quoique le miel soit tiré des plantes, il a reçû tant d'élaborations différentes qu'il ne laissoit gueres lieu de soupçonner avant cette expérience qu'on en put tirer du fer.

On explique ce phénomene en deux maniéres différentes. La premiére est que les racines des plantes succent un suc vitriolique ou ferrugineux dont on croit que toutes les terres sont empreintes, & que ce suc monte & se distribue par toute la plante pour sa nourriture; d'où vient, dit-on, qu'après avoir brulé la plante, on trouve dans ses cendres le fer dont le feu a fait rassembler & rejoindre les particules.

La seconde explication ne reconnoit point de fer dans les plantes en leur état naturel; mais elle prétend que le feu par la force de son action brulant ou calcinant les * plantes, convertit une partie de leurs cendres en fer.

* Pag. 281. in 4.

L'une & l'autre explication me paroît bien difficile à comprendre; car pour la premiére il faut non seulement admettre que toutes les terres où croissent les plantes soient ferrugineuses: il faut concevoir que la substance pesante du fer ait été portée & élevée jusqu'au sommet de la plante, qu'elle ait servi à composer le suc le plus volatil & le plus pur des fleurs, ressemblant à une rosée que les abeilles lechent & recueillent: que cette substance ait souffert toutes les élaborations dans les mouches & dans les

ru-

ruches, sans que la partie ferrugineuse s'en soit séparée: & qu'enfin cette partie ferrugineuse ait été à l'abri de toutes les tortures qu'on a données au miel dans l'analyse qu'on en a faite.

La seconde explication n'est pas moins obscure que la premiére; car on ne se persuadera pas aisément que la seule action du feu puisse convertir le charbon de miel en fer.

Je ne sçai si au milieu de ces deux explications, il n'y auroit point lieu de soupçonner qu'il se puisse rencontrer dans la nature plusieurs matieres autres que le fer capables d'être attirées par l'aimant. C'est peut-être ce qu'un grand nombre d'expériences nous découvrira avec le tems.

Il y a deux petites réflexions à faire sur l'analyse du miel. La premiére est, que quoique le miel en son état naturel ait une saveur très-douce, il n'y a pas un de ses principes qui étant séparé ait retenu ce goût. On en tire par la distillation une eau presque insipide, beaucoup de liqueur acide qu'on appelle esprit, de l'huile, un peu de sel fixe; mais en toutes ces substances son goût naturel ne se rencontre point, & même on a beau remêler ces principes ensemble, on n'y remettra point la douceur. Mon sentiment sur ce fait est que pour faire la douceur il faut un mêlange exact d'acide & d'huile: l'huile seule est fade & passe sur la langue sans y faire d'impression, l'acide au contraire picotte la langue; mais quand ces deux principes * sont mêlez ensemble, les pointes de l'acide sont liées par les parties rameuses de l'huile, en sorte qu'elles n'ont plus la force de faire de l'irritation sur la langue, mais elles en ont assez pour faire pénétrer doucement l'huile en lui *Pag. 282. in 4.

ſervant de vehicule, & exciter ſur les nerfs du goût une agréable impreſſion ou chatouillement que nous appellons douceur. Ce raiſonnement eſt confirmé par une infinité d'expériences, car de toutes les choſes douces on retire de l'acide & de l'huile, & alors il n'y a plus de douceur. On fait auſſi du doux en mêlant exactement un acide avec une matiere ſulfureuſe; car ſi l'on fait diſſoudre le plomb qui eſt inſipide mais ſulfureux, avec un menſtrue acide, la diſſolution ſera douce, & l'on en fera par évaporation un ſel qu'on appelle ſucre de Saturne, à cauſe de ſa grande douceur. Si enſuite l'on fait diſtiller ce ſel de Saturne, on en retirera une liqueur acide, & il n'y aura plus de ſaveur ſucrée. Il ne ſuit pourtant pas de ce raiſonnement que toutes les fois qu'on mêlera groſſierement une liqueur acide avec de l'huile ou avec une matiere ſulfureuſe, le mêlange en ſera doux: il faut pour faire la douceur que l'acide ſoit intimement & parfaitement incorporé & mêlé avec l'huile, ce qui eſt fait très-ſouvent par la nature, & quelquefois par l'art.

La ſeconde réflexion eſt que ſuivant toutes les apparences le miel en ſon état naturel ne contient aucun alkali: tout ce qui en provient par la diſtillation eſt acide. Le charbon même qu'on en retire au ſortir de la cornue ne donne point de marque d'alkali, puiſqu'il ne fermente point avec les acides. Et ſi le peu de ſel fixe qu'on tire de ce charbon eſt alkali, ce n'eſt qu'après une grande & longue calcination, qui rendant la plûpart des ſels poreux & en chaux, les fait devenir alkali,

d'aci-

d'acides qu'ils étoient. L'esprit de miel rectifié est aperitif; on en peut donner jusqu'à deux scrupules à la dose. On s'en sert aussi exterieurement pour faire croitre les cheveux. Celui qui reste au fond de la cucurbite après la rectification, est bon pour déterger les vieux ulceres: il contient la partie la plus * acre de la liqueur. Plusieurs Chimistes ont dit dans leurs Ecrits que l'esprit de miel rectifié dissolvoit l'or & plusieurs autres métaux: mais comme tout ce qui est écrit n'est pas toujours véritable, j'en ai voulu faire l'expérience. J'ai trouvé qu'effectivement ce menstrue avoit dissout quelque legere portion de l'or, mais sans qu'on y eut apperçû aucune fermentation.

* Pag. 283. in 4.

L'argent ni l'étain n'ont point été pénétrez par cet esprit: le fer en a été bien pénétré, & il s'est fait une teinture noire & vitriolique,

Le plomb en a été aussi pénétré, & le dissolvant a pris un goût doux & sucrin, ce qui marque une dissolution.

Le cuivre a donné au menstrue une impression & une odeur de Venus, mais il ne lui a point fait changer de couleur.

Le mercure en a été pénétré, & il s'en est dissout une petite portion.

*Pag. 284. in 4.

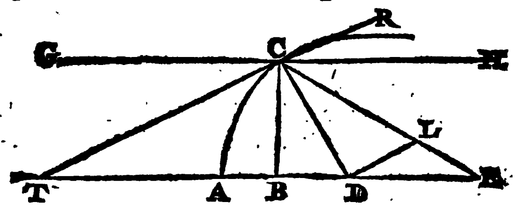
*METHODE

Pour trouver les foyers des Lignes Géométriques de tous les genres.

Par M. ROLLE.

ARTICLE PREMIER.

† SOIT *AC* une Courbe telle qu'on voudra, & que l'on veuille trouver tous les foyers qui se forment dans son axe générateur *AE*.



On observera en premier lieu les lignes qui doivent servir au calcul. Ensuite l'on exprimera chacune de ces lignes par des lettres: ce qui se peut faire en cette maniére.

AB abscisse quelconque dont l'appliquée *BC* fait un angle droit *CBD* avec l'axe *AE*, & le point *C* est un point pris à volonté sur la Courbe.

CD est une droite perpendiculaire à la Courbe proposée, ou le rayon de la tangente au point *C*.

T

† 21. Juillet. 1706.

T eſt un point donné ſur l'axe *AB*.

TCR eſt un rayon de lumiere, ou le rayon incident, ou le rayon direct.

CE eſt le rayon lumineux rompu en *C*, qui rencontre l'axe en un point *E*.

DL parallele au rayon incident *TC*.

**DCR* ou *TCD* eſt l'angle d'incidence. * Pág. 285. in 4.

DCE eſt l'angle rompu, ou l'angle de réfraction. Ainſi l'angle rompu *DCE*, & l'angle d'incidence *TCD* ou ſon égal *CDL*, ſont deux angles du triangle *CLD*; & de-là il eſt aiſé de voir que le côté *CL* eſt au côté *LD*, comme le ſinus de l'angle d'incidence eſt au ſinus de l'angle rompu.

On prendra m & n pour exprimer les rapports du ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de l'angle rompu.

y pour l'expreſſion des abſciſſes *AB*.

x pour les appliquées *BC*.

z pour la ſous-perpendiculaire *BD*.

t pour *TA*. l pour *TC*.

v pour *AE*. d pour *DE*.

h pour *DL*, & par conſéquent $\frac{mh}{n}$ pour *CL*.

r pour *CE*. Ainſi l'on aura $r - \frac{mh}{n}$ pour *LE*.

s pour la ſoûtangente des y.

Cela poſé, on formera toutes les égalitez que fournit la figure rectiligne. Ce qui ſe peut faire comme on le voit ici.

$y + z + d = v$. pour les parties de l'axe.

$s : x :: x : z$. Donc $sz = xx$. Parceque l'appliquée eſt moienne proportionelle entre la ſoûtangente & la ſoûperpendiculaire.

$ll = xx + yy + 2yt + tt$. à cause de l'angle droit CBT.

$rr = xx + zz + 2dz + dd$. à cause de l'angle droit CBE.

$d : b :: v + t : l$. Donc $ld = bv + bt$.

$b : r - \frac{mb}{n} :: l : r$. Donc $rb = lr - \frac{mbl}{n}$.

Ces deux dernieres égalitez se tirent des triangles semblables EDL, ETC: Et ces deux triangles sont semblables à cause que DL est parallele à TC.

Faisant évanouir toutes les inconnues hors l, r, t, v, on trouvera cette égalité:

$mvsl - mxxl - mysl = ntsr + nxxr + ntsr$.

Où l'on voit que l & r sont en situation réciproque, aussi-bien que v & t. Ce qui servira
Pag.286. in 4. dans la suite à faire voir que le point E se peut considérer comme un point donné, & le point T comme celui que l'on cherche.

Et si l'on fait encore évanouir l & r, on aura l'égalité ou la formule que l'on voit ici en M.

$$M.\ \overline{\overline{mvs - mxx - mys}}^{2} \times \overline{tt + 2ty + yy + xx}$$

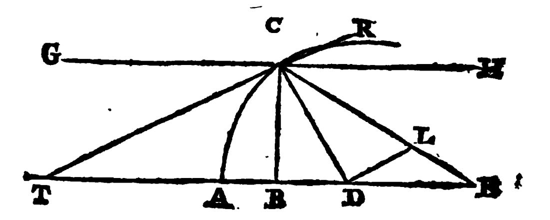
$$= \overline{\overline{nts + nxx + nys}}^{2} \times \overline{vv - 2vy + yy + xx}.$$

Dans cette formule M la lettre t exprime une ligne donnée ou indéterminée, & tandis que cette ligne sera finie les rayons TC feront toujours un angle oblique avec l'appliquée CB. Mais si l'on veut que cet angle soit droit, & que par conséquent les rayons incidens soient paralleles à l'axe; alors l'inconnue t deviendra infinie, & dans ce cas son premier coefficient sera détruit dans la formule M, selon ce qui a été dit des premiers coefficiens dans la méthode des

des Questions indéterminées que je donnai au public en l'année 1699. Ensorte que la formule *M* se réduira à celle que l'on voit ici en *N.*

$$N.\ \overline{mvs - mmu - mys}^{2} = nnss \times \overline{vv - 2vy + yy + uu}.$$

Ainsi l'égalité *N* est une formule pour le cas où les rayons sont paralleles à l'axe, comme l'égalité *M* est une formule pour les rayons qui sont obliques à l'axe, & qui partent d'un point fixe *T*.



On trouveroit encore cette formule *N* par la comparaison des lignes ou des angles, en supposant que le rayon *GC* soit parallele à l'axe *AB*. Alors l'angle d'incidence* *GCD* seroit égal à l'angle *CDE* du triangle *CDE*; & l'on a dans le même triangle l'angle rompu *DCE*: de maniére que le côté *CE* seroit au côté *ED*, comme le sinus de l'incidence au sinus de la réfraction, ou comme *m* est à *n*. Et prenant les autres égalitez qui se présentent, on en tireroit d'abord la formule *N*. *Pag. 287. in 4.

Comme les foyers qui se forment des rayons paralleles sont les premiers dont on fait quelque usage, & que la formule en est simple, je la prendrai pour exemple dans la suite de ce premier Mémoire.

ART. II. *Si l'on a l'égalité génératrice d'une Courbe, & que l'on veuille trouver les foyers de cette Courbe avec les conditions que l'on a marquées dans l'Article précédent, on prendra l'égalité de la soûtangente qui appartient à l'axe sur lequel sont les foyers; & comparant ces deux égalitez à celles du premier Article, ou seulement à la formule qui en résulte, on en fera évanouir toutes les inconnues hors* x *&* v. En quoi il faut observer de mettre au lieu de m & de n les nombres qui leur sont égaux, & il arrivera que les deux inconnues x & v se trouveront dans la réduite, ou bien que cette réduite n'aura que la seule inconnue v. Ce qui marque deux cas dans la Regle.

Si l'on prend pour exemple l'égalité génératrice marquée *P*, on aura pour la soûtangente des y, celle que l'on voit en *R*.

$$P.\ 9xx = 18ay - 5yy.\quad R.\ s = \frac{9xx}{9a - 5y}.$$

Et voulant trouver les foyers des rayons qui sont paralleles à l'axe des y, on prendra ces deux égalitez avec la formule *N* de l'Article précédent pour en faire évanouir les inconnues x & y. En quoi il faut se souvenir de substituer les nombres qui sont égaux à m & à n, ou qui en marquent le rapport; & si l'on a $m = 3$ avec $n = 2$, comme on le fait ordinairement lorsque les rayons passent de l'air dans le verre, la réduite sera telle qu'on la voit ici en *D*.

$$D \ldots 5vv - 18av + 9aa = 0.$$

ART. III. Lorsque l'inconnue v est la seule inconnue * de la réduite, comme dans l'exemple du précédent Article, on a autant de foyers sur l'axe proposé, qu'il se trouve de racines réelles dans

* Pag. 288 in 4.

dans cette réduite, & chacun de ces foyers est un point géométrique.

Pour trouver ces foyers il n'y a qu'à prendre sur cet axe des parties comme AE qui soient égales à ces racines.

Dans l'exemple proposé les racines de la réduite sont $3a$ & $\frac{3}{5}a$. Ainsi du point A comme centre & des intervales $3a$ & $\frac{3}{5}a$, aiant décrit deux cercles, les deux points où ils coupent l'axe du côté de E, sont deux foyers de la Courbe proposée qui ont les conditions requises.

ART. IV. Si les deux inconnues u & v se trouvent dans la réduite, on supposera que le dernier terme des u est égal à 0. Ce qui donnera une égalité dans laquelle il n'y aura que la seule inconnue v: Et cette égalité étant résolue, ses racines serviront à trouver les foyers qu'on demande. comme on le va dire ici.

Soit pour exemple l'égalité génératrice marquée ici en E.

$$E \ldots xx = 2ay - yy.$$

On aura pour l'égalité des soûtangentes celle que l'on voit ici en F.

$$F \ldots s = \frac{xx}{a-y}.$$

Comparant ces deux égalitez avec la formule N pour avoir les foyers des rayons qui sont paralleles à l'axe, comme on l'a dit aux Articles qui précédent, & prenant $2m = 3n$ pour le rapport des sinus, on trouvera la réduite H.

$$H. \quad \begin{array}{ll} +64vvuu & +25v^4 = 0. \\ -128avuu & -100av^3 \\ +64aauu & +46aavv \\ & +108a^3v \\ & -63a^4 \end{array}$$

Et ſuppoſant que le dernier terme des x ſoit égal à 0, on aura l'égalité G.

G. $25v^4 - 100av^3 + 46aavv + 108a^3v - 63a^4 = 0$, dont les racines ſont $-a$. $\frac{3}{5}a$. $\frac{7}{5}a$. $3a$.

* Pag. 289. in 4. * Les racines d'une égalité ainſi trouvée, ſont les limites des foyers que l'on demande ſur l'axe propoſé *AB*, pour tous les rameaux de la Courbe propoſée : Et comme on ne demande pas ordinairement tous ces foyers, ni même l'étendue entiere d'un ſeul, on peut en rabatre tout ce qui ne ſert point aux deſſeins particuliers que l'on peut avoir ſur ce ſujet, comme on le va dire ici..

Parmi tous ces foyers il s'en trouve d'imaginaires qui doivent être exclus, & ſouvent auſſi il s'en trouve de négatifs qui ne répondent pas à l'intention que l'on a. Mais la méthode les diſtingue, & cela ſe peut faire en cette maniére.

On diſpoſera les racines de l'égalité G ſelon l'ordre de leur grandeur, comme on le voit en *K*.

K . . . $-a$. $\frac{3}{5}a$. $\frac{7}{5}a$ $3a$.

Et l'on prendra d'autres grandeurs dans leurs intervales une dans chacun, comme je l'ai dit dans la Méthode des indéterminées, & comme on le voit ici en *L*.

L . . . $2a$. 0. $\frac{2}{3}a$ $4a$.

Enſuite on ſubſtituera chacune de ces quantitez au lieu de v dans la réduite *H*, pour ſçavoir ſi elle donne des valeurs réelles ou des imaginaires pour x dans l'égalité qui réſulte de la ſubſtitution.

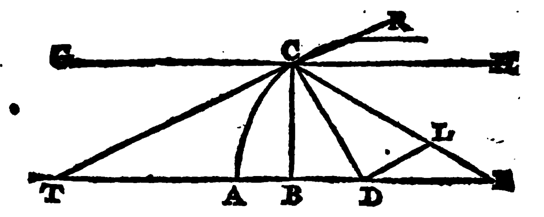
Si la réſultante renferme des valeurs *réelles* de x, alors l'intervale dans lequel aura été priſe la valeur ſubſtituée ſera un foyer lineaire où

ſe

se vont rendre tous les rayons rompus. Ainsi l'on trouvera que l'intervale de $-a$ à $\frac{1}{3}a$ est un foyer, & que l'intervale de $\frac{2}{3}a$ à $3a$ est encore un foyer de la Courbe proposée sur l'axe proposé: parceque la substitution de o & celle de $2a$ qui ont été prises dans ces intervales donnent des valeurs réelles pour l'inconnue x.

Mais il peut arriver que parmi ces foyers il y en ait quelques-uns qui n'ont pas toutes les conditions que l'on y a desirées; auquel cas on peut toujours s'en assurer par le calcul. Car toutes ces conditions doivent être exprimées par des égalitez dans le Problême rectiligne, comme* on l'a fait ici art. 1. & 2. De maniére que ce Problême étant pleinement résolu, il sera facile de voir si tous les segmens de la Figure sont tels qu'on les a supposez ou qu'on les desire. Quelquefois une partie de ces conditions suffiroit pour exclure les foyers qui ne conviennent pas, ou bien pour s'assurer de ceux qui conviennent. Par exemple, dans l'hypothêse que l'action de la lumiere se fait de G en C, il faut que les foyers soient dans l'axe positif AB, & delà on voit que le foyer qui a pour limites $-a$ & $\frac{3}{4}a$ ne peut pas satisfaire à cette condition.

* Pag. 290. in 4.



Mais delà on peut voir aussi que le foyer ren-

fermé entre 4 a & 3 a est un foyer lineaire qui a toutes les conditions que l'on y a demandées.

Cette méthode est générale pour les lignes géométriques de tous les genres ; mais elle suppose d'autres méthodes que j'ai données au public, comme on le verra dans les Remarques suivantes.

REMARQUE.

Première. Souvent il arrive que l'égalité proposée fournit différentes Courbes, ou une Courbe composée de différens rameaux, & il est certain que tous ces rameaux ne peuvent pas également convenir aux différens desseins que l'on peut avoir sur la fabrique & sur l'usage des verres. Ainsi il est comme nécessaire pour cette raison & pour d'autres raisons encore, de connoitre les contours de tous ces rameaux & leur différente situation à l'égard de l'axe * générateur, & de l'origine qui leur est commune. Ce qui se peut faire par le moien de la méthode que je donnai au public en l'année 1699 pour la résolution des Questions indéterminées, selon ce qui en a été dit dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1702 pag. 231 †, & de l'année 1703 pag. 162. ‡

*Pag 291. in 4.

Seconde. Dans l'hypothése que les foyers doivent être placez sur l'axe, il est évident qu'en plusieurs occasions il faudroit le transferer, & par conséquent transformer l'égalité génératrice. Cela se peut faire en général par le moien des formules que j'ai données pour ces transpositions d'axes dans le *Journal* du 13 Avril 1702 pag. 388. de l'Ed. d'*Amsterdam*, ou bien par des voies particulieres qui sont ordinaires, & qui peuvent quelquefois suffire dans cette occasion.

On

† Sec. Edit. pag. 244. ‡ Sec. Edit. pag. 170.

On peut chercher les foyers dans le plan de la Courbe sans faire cette transposition d'axes, ni par conséquent transformer l'égalité proposée; & même on le peut faire lorsque les rayons viennent d'un point donné hors de l'axe dans le même plan. Alors il faudroit faire des additions & d'autres changemens dans le Problême rectiligne: ce qui augmenteroit le calcul, mais il n'y auroit d'ailleurs aucune difficulté considérable.

Troisiéme. Les réduites telles que *H* du second exemple produisent des Courbes dont les axes sont les foyers des Courbes proposées; ensorte que ces axes sont Caustiques, & même leurs Courbes le sont aussi. Ainsi la réduite *H* fournit deux feuilles égales & semblables, dont les axes limitez sont deux foyers lineaires de la proposée *E*, & l'on peut dire que ces feuilles sont plus ou moins ardentes, selon que leurs parties sont plus ou moins proches de l'axe, & selon que les parties de cet axe sont plus ou moins embrasées.

Quatriéme. Les *maxima* & les *minima* de la réduite servent à distinguer dans chacun des foyers que fournit la méthode, toutes les parties qui conviennent aux différens rameaux de la Courbe proposée. Ainsi dans le dernier exemple les *maxima* de *x* pris dans la réduite divisent * chaque foyer en deux parties, dont l'une appartient au demi-cercle qui présente sa convexité aux rayons lumineux, l'autre partie de ce foyer appartient au demi-cercle qui reçoit ces rayons dans sa concavité. Mais dans cette seconde partie il faut supposer que la réfraction se change en une espece de réflexion, de maniére que l'incidence soit à cette réflexion com-

* Pag. 292. in 4.

me

me m à n, ou bien que la refraction dans ce demi-cercle ne dirige point les rayons lumineux du côté de l'axe, & que par conséquent il faut retrancher du foyer tout ce superflu pour satisfaire au dessein que l'on s'est proposé. Ainsi aiant trouvé que le foyer positif est l'intervale de $\frac{5}{4}a$ à $3a$ pour le cercle entier, on trouvera $2a - \frac{2a}{\sqrt{5}}$ pour ce qui appartient au premier demi-cercle dans lequel les réfractions ont les conditions requises, & le reste $\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{3}{4}a$ qui appartiendroit au second demi-cercle pourra être rejetté.

Cinquiéme. Par le moien d'une réduite telle que H, on peut trouver les parties de la Courbe proposée qui conviennent à un foyer dont la longueur est donnée, & par conséquent trouver le diamétre du verre qui convient à ce foyer donné. On peut encore par la même réduite trouver la longueur du foyer qui convient à une portion donnée de cette Courbe, & par conséquent à un verre dont le diamétre est donné dans tous les cas possibles. Ce qui est évident, puisque des deux inconnues de cette réduite, l'une exprime la longueur du foyer, & l'autre la hauteur du verre.

On n'a envisagé dans la méthode & dans ces remarques que la superficie du verre, ne voïant pas qu'il y ait de la difficulté quand il faut avoir égard à son épaisseur, ni quand il faut se servir de plusieurs verres, lorsque l'on a une méthode pour la surface d'un verre quelconque.

Sixiéme. J'ai dit dans le second article de la méthode de substituer les valeurs de m & de n,

&

& il étoit bon de le dire pour mieux faire voir comment le troisiéme article est distingué du quatriéme article. Mais il y a des égalitez, * quoiques conçues en termes généraux, où il ne seroit pas nécessaire de faire cette substitution en y appliquant le troisiéme article, & on le verroit si l'on prenoit pour exemple l'égalité marquée ici en *T*. * Pag. 293. in 4.

$T \ldots mmxx = 2ammy + nnyy - mmyy.$

On s'appercevroit d'abord, en y appliquant les trois premiers articles, que l'inconnue x s'évanouit par elle-même, sans qu'il soit nécessaire de déterminer m ni n. On verroit aussi qu'il ne demeure dans la réduite que la seule inconnue v: que par conséquent tous les foyers sont des points géométriques, & que l'on a toujours $v = \frac{am}{m \mp n}$ pour les trouver, lorsque les rayons sont paralleles à l'axe.

Septiéme. La méthode que je viens de proposer étant bien conçue, il sera facile de l'appliquer aux égalitez dont les coefficiens sont indéterminez, & de former son inverse par le moien de la méthode des indéterminées dont j'ai parlé dans la premiére remarque. Il y a des exemples néanmoins où cette méthode ne seroit pas nécessaire comme on le va voir ici.

Soit pour exemple l'égalité marquée *V*.

$V \ldots bxx = 2aby + cyy.$

Et qu'on veuille y appliquer la Regle que j'ai donnée ici pour trouver sur l'axe des y les foyers de toutes les Courbes que fournit cette égalité, on aura d'abord $s = \frac{bxx}{ab + cy}$ pour les soûtangentes.

Ces

Ces deux égalitez étant comparées à la formule *N* du premier article pour faire évanouir les inconnues, on trouvera, après que s & le quarré yy auront disparu, la résultante que l'on voit ici en *S*.

$$S \ldots + cnnbxx - 2nnbcvy + nnbcvv = 0.$$
$$+ nnbbx + 2mmbcvy - mmbcvv$$
$$- mmbbxx + 2mmccvy + 2mmabcv$$
$$- 2bcmmxx - 2nnabby - mmaabc.$$
$$- mmccxx + 2mmabby.$$
$$+ 2mmabcy$$

Pag. 294. in 4. Où l'inconnue y se trouve encore. Ainsi il faudroit poursuivre son évanouissement pour avoir une réduite dans laquelle il n'y eut que x & v comme au quatriéme article. Mais si l'on ne veut que le cas du troisiéme article, il n'y a qu'à distribuer tous les monomes de cette égalité hors ceux dont v est la seule inconnue, & ceux aussi qui ne renferment aucune des inconnues, pour en former un problême auxiliaire comme on l'a fait dans l'inverse générale des tangentes, & comme on le voit ici en *C*.

C. {
$+ nncb + nnbb - mmbb - 2mmbc - mmcc = 0$. pour les xx.
$- 2nnbc + 2mmbc + 2mmcc = 0$ pour les vy.
$- 2nnabb + 2mmabb + 2mmabc = 0$ pour les y.

Prenant a, b, c, pour les inconnues du problême auxiliaire qu'expriment ces trois égalitez, on trouvera d'abord $c = \frac{nnb - mmb}{mm}$ qui résout entierement ce problême; & substituant cette valeur de c dans *S*, cette égalité *S* aura la forme que l'on voit ici en *A*.

A

$A \ldots nnbcvv - mmbcvv + 2ammbcv - mmbcaa = 0$.

Dans laquelle on trouve $v = \frac{am}{m \pm n}$ qui donne sur l'axe des y tous les foyers des Courbes proposées qui sont des points géométriques. Et substituant aussi la valeur de c dans la proposée V, on aura la resultante qui est marquée T dans la sixiéme Remarque. Ensorte que cette égalité T renferme toutes les Courbes du premier genre dont les foyers sont des points géométriques sur l'axe des y; & delà aussi on voit que les valeurs de v prises dans D donnent tous ces foyers.

Mais pour l'universalité de la méthode il faut poursuivre l'évanouissement de y jusqu'à ce qu'il ait entierement disparu, & supposer que le dernier terme des x est égal à 0, comme on l'a dit au quatriéme article de la Méthode; de maniére que l'égalité ainsi formée n'aura que la seule inconnue v.

Comme cette égalité se résout entierement par la division, il n'est pas nécessaire d'y appliquer la méthode des indéterminées pour tirer avantage de l'indétermination,* & même l'on trouvera que les racines ne sont pas fort composées. Car ces racines ne sont comme on les voit ici en E. *Pag. 295. in 4.

$$E. \begin{cases} v = \frac{am}{m+n}. \quad v = \frac{acm + 2abm + 2abn}{-cm - cn}. \\ v = \frac{am}{m-n}. \quad v = \frac{acm + 2abm - 2abn}{cn - cm}. \end{cases}$$

Ensorte que ces quatre valeurs de v donnent tous les foyers de toutes les Courbes du premier genre sur l'axe proposé, soit que ces foyers soient

soient des points géométriques, ou qu'ils soient lineaires.

Si l'on veut les foyers du cercle, il est évident que dans ce cas l'égalité proposée en V devient $xx = 2ay - yy$, & que par conséquent il faut faire $b = -c$ pour substituer cette valeur de b dans les formules. Ce qui donne $v = \frac{am}{m \pm n}$, & $v = \frac{am - 2an}{m - n}$ pour les foyers du cercle.

Pour la Parabole on aura, $c = 0$, & par conséquent $v = \frac{am}{m \pm n}$, & $v = \infty$ pour ses foyers.

On aura les foyers de l'hyperbole en prenant un nombre positif pour $\frac{c}{b}$, & l'on trouvera ceux de l'Ellipse si l'on prend pour $\frac{c}{b}$ un nombre négatif plus grand ou plus petit que l'unité; ensorte que la substitution de ces valeurs E donnera les foyers sur l'axe proposé, & que la substitution de ces valeurs dans l'égalité V déterminera l'espece des hyperboles & des Ellipses ausquelles ces foyers conviennent.

Jusques-ici j'ai pris le mot de foyer selon l'idée la plus ordinaire des Géometres, & selon cette idée l'on peut voir que toutes les Courbes ont des foyers finis ou infinis.

PRIN-

*PRINCIPES GENERAUX POUR LA RESOLUTION DES EQUATIONS NUMERIQUES.

* Pag. 296. in 4.

Par M. DE LAGNY.

† SECONDE PARTIE.

‡ RESOUDRE une équation numerique, c'est trouver la valeur ou les valeurs de l'inconnue en nombres entiers lorsque cette valeur ou ces valeurs sont rationelles, & les trouver à moins d'une unité près, lorsqu'elles sont irrationelles.

Je suppose ces équations sans incommensurables & sans fractions, parcequ'il est toujours aisé de leur donner cette forme par les regles ordinaires.

Résolution reguliere est celle qui se fait par une méthode reglée universelle & infaillible. Cette méthode est d'autant plus parfaite qu'elle est plus courte & plus simple. C'est pourquoi, si par une certaine méthode je trouve le nombre cherché deux ou trois fois plutôt que par une autre; la premiére méthode est deux ou trois fois plus parfaite ou meilleure que la seconde.

De quelque méthode qu'on se serve, on ne peut prouver que par parties & l'une après l'autre le nombre cherché, lorsqu'il est grand. J'ap-

† *La premiére Partie est dans les Mémoires de l'Académie de l'Année* 1705. *pag.* 367.
‡ 21 Juillet 1706.

J'appelle ces parties, le premier, le second, le troisiéme, &c. membre de la racine. Ainsi dans l'extraction des racines quarrées, cubiques, &c. suivant l'expression ordinaire des chifres fondée sur la progression décuple, si la racine cherchée est par exemple 8673, on trouve d'abord le premier chifre, 8, c'est-à-dire le premier membre, 8000; & par le moien de celui-ci on trouve le second, 6 ou 600; & par la somme de ces deux premiers membres 86 ou 8600 considerez comme un seul membre, * on trouvera le troisiéme, 7 ou 70; enfin par la somme des trois premiers membres trouvez, 867 ou 8670 considerez comme un seul membre, on trouve le quatriéme & dernier membre 3, ce qui donne la racine entiere cherchée, 8673.

* Pag. 297. in 4.

Comme ces regles sont fondées sur le choix arbitraire, ou plutôt capricieux, de la progression décuple, elles se sentent de ce défaut, & elles ne peuvent être aussi parfaites que des regles fondées uniquement sur la raison & la nature même des équations indépendamment de toute expression arbitraire. Le premier & le plus grand défaut de toutes les méthodes qu'on a données jusqu'à présent est le tatonnement. Rien ne fatigue & ne rebute tant que de travailler à l'aveugle; & quoique le nombre des tatonnemens soit reglé, il est constant par l'expérience de tous ceux qui se mêlent de calcul, qu'il y a une espece de chagrin & d'affliction d'esprit inséparables du mauvais succès de l'operation, lorsqu'après avoir suivi exactement les regles on trouve qu'on a pris trop ou trop peu, & qu'il faut recommencer le calcul tout de nouveau. C'est, pour ainsi dire, se tromper avec art & mé-

méthode: toute operation où il entre du tatonnement est indigne du nom d'operation mathematique ou scientifique. On n'a, pour s'en convaincre, qu'à comparer les operations géométriques à celles de l'Arithmetique ordinaire. Que penseroit-on de la résolution d'un problême géométrique, où il faudroit tatonner & recommencer plusieurs fois la même operation avant que d'être assuré qu'on eût bien operé? Je fais également abstraction des erreurs de fait, & je ne parle que de celles qui sont essentielles à la méthode.

Le principal avantage de mes logarithmes est d'exclure absolument tout tatonnement des operations arithmetiques, c'est-à-dire, de la division & de l'extraction des racines qui y sont essentiellement sujettes dans l'Arithmetique ordinaire, & le principal avantage de ma nouvelle méthode de résoudre les équations est aussi d'en exclure tout tatonnement.

* Il faut remarquer qu'au lieu d'une espece de tatonnement qui se trouve dans la division ordinaire, il y en a plusieurs especes plus difficiles & plus embarrassantes dans l'extraction des racines, à mesure qu'on les tire d'une puissance plus élevée, ou que l'équation est composée d'un plus grand nombre de termes affectez de signes différens.

* Pag. 298. in 4.

Dans l'extraction de la racine quarrée, outre les tatonnemens essentiels à la division, il y en a une nouvelle espece de plus, parceque le diviseur qui devroit & qui ne peut pas être $2ab+b$, car c'est b qu'on cherche, est seulement $2a+1$; ainsi il ne suffit pas de trouver par les tatonnemens ordinaires de la division le plus grand quotient qui multiplié par $2a+1$ pro-

produise $2ab+b$, tel que ce produit puisse être ôté du dividende correspondant, il faut qu'on en puisse ôter $2ab+bb$. Je suppose b plus grand que 1.

Dans l'extraction de la racine cubique le diviseur devroit & ne peut pas être $3aa+3ab+bb$, parceque c'est b qu'on cherche, & on ne peut prendre universellement pour diviseur que $3aa+3a+1$; c'est pourquoi le tatonnement est plus grand que dans la racine quarrée: car il ne suffit pas de pouvoir ôter du dividende $3aab+3ab+1b$, il faut en pouvoir ôter $3aab+3abb+b^3$, ainsi du reste. Je suppose toujours b plus grand que 1.

En un mot dans l'extraction des racines le diviseur est toujours trop petit & imparfait, & d'autant plus imparfait que la racine cherchée est celle d'une puissance plus élevée.

C'est encore toute autre chose dans l'extraction numerique des racines des équations composées. Car le grand nombre des termes, le raport différent des coefficiens, & le mélange des signes + & — qui se détruisent en partie, cause nécessairement une très-grande incertitude dans les operations, & les tatonnemens s'y trouvent en plus grand nombre, plus pénibles, plus rebutans & plus sujets à erreur.

Le second défaut des anciennes méthodes vient du * choix arbitraire de la progression décuple, qui fixe le raport du premier membre d'une racine cherchée au second, & celui du second au troisiéme, & ainsi de suite sans aucune raison & contre la nature de l'équation; ce qui rend en général la résolution plus longue & plus imparfaite.

* Pag. 299. in 4.

Com-

Comme il s'agit de détruire un préjugé également ancien & général, je vais tâcher de rendre sensible ce défaut, dont personne, que je sçache, ne s'est apperçû.

Je suppose qu'on veuille trouver le raport du rayon au côté de l'octodecagone. J'appelle le rayon a & le côté x, j'aurai cette équation à resoudre,

$$x^3 = 3aax - a^3.$$

Et supposant le rayon $a = 100000.000$, j'aurai cette équation numerique,

$$x^3 = 300000.00000.00000.0x - 100000000.00000000.00000000.$$

Ou pour abreger l'expression,

$$x^3 = 3 0^{16} x - 1 0^{24}.$$

Il faut trouver la petite valeur d'x.

Si l'on suit les methodes ordinaires de *Viete*, d'*Harriot*, d'*Ougtred*, &c. on trouvera $x = 34729.635$.

La premiére operation donnera le premier chifre 3, & celui-ci par une seconde operation plus longue que la premiére donnera le second chifre 4. Ces deux joints ensemble & faisant 34 donneront par une troisiéme operation beaucoup plus longue que la seconde le troisiéme chifre 7, & ces trois joints ensemble faisant 347 donneront par une quatriéme operation incomparablement plus longue que les trois autres le quatriéme chifre 2, & ainsi de suite; ensorte qu'il y a toûjours autant d'operations à faire que de chifres à trouver dans la racine, & que la difficulté de les trouver augmente continuellement à chaque operation.

Mais suivant ma methode on trouvera,

Pour premier membre $\frac{1}{3}a = 33333.333\frac{1}{3}$

Pour le second . . $\frac{1}{72}a = 1388.888\frac{8}{9}$

Pour le troisiéme. $\frac{73}{3847744}a = \ldots.7.413 +$

Somme . . . . . $= 34729.635 +$

* Pag. 360. in 4. * Il eſt évident que cette derniere méthode eſt incomparablement plus abregée que la premiére.

Le troiſiéme défaut eſt d'exprimer les valeurs des racines des équations numeriques par des formules irrationelles qui ſont ou tout à fait inutiles, n'étant qu'une pure petition de principe, ou qui donnent des valeurs de l'inconnue plus obſcures &. plus intelligibles après cette prétendue réſolution qu'auparavant.

Si l'on demande la valeur de x dans l'équation $xx = 7056$ & qu'on réponde, x eſt égal à la racine quarrée de 7056. $x = \sqrt{7056}$, c'eſt certainement très-mal répondre; car c'eſt une pure petition de principe, & je n'en ſuis pas plus avancé: il faut répondre, x eſt égal à 84, & ſi l'équation eût été $xx = 7200$, il auroit fallu répondre x eſt irrationelle & ſa valeur eſt entre 84 & 85. Il eſt vrai qu'il faut encore pouvoir approcher à l'infini de la veritable valeur en fractions; car une équation numerique n'eſt parfaitement réſolue que lorſqu'on donne toutes les valeurs poſſibles rationelles en nombres, & qu'on peut approcher à l'infini des valeurs irrationelles, tout le reſte eſt chimerique.

Soit l'équation du ſecond degré $xx + 54876x = 384181$, ſi l'on répond ſuivant la formule irrationelle ordinaire $xx + ax = bb$ qui donne $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$; ſi, dis-je, l'on répond $x = \sqrt{753.228.025.} - 27438$, on aura trés-mal répondu & trés-mal operé, car la racine eſt 7; & au lieu du grand & pénible détour qu'il faut prendre ſuivant la formule, je n'ai qu'à comparer le coefficient d'x qui eſt 54876

com-

comme diviseur à l'homogene de comparaison, 384181, je vois qu'en 38, qui sont les deux premiers chifres du dividende, 5 premier chifre du diviseur y est 7 fois, & je me détermine à prendre 7, parceque comptant les chifres du coefficient comme côté, & ceux de l'homogene comme plan, je trouve cinq tranches dans le premier, & trois seulement dans le second, ce qui marque que le coefficient est le terme dominant, & dans tous les cas semblables on peut & on doit operer de même. Après avoir trouvé * 7 je le multiplie par le coefficient 54876, & j'ajoûte au produit qui est 384132 le quarré de 7 qui est 49, & la somme 384181 se trouve égale à l'homogene de comparaison; & s'il se fût trouvé un peu plus grand ou plus petit d'un nombre moindre que le coefficient, la racine auroit été irrationelle, & on auroit pu approcher à l'infini de sa valeur suivant les méthodes que j'ai données dans mon Traité *de l'Extraction & de l'Aproximation des racines.*

* Pag. 301. in 4.

Cette remarque du terme *dominant* qui fait regarder xx comme nul, abrege l'operation indéfiniment; ensorte qu'on résoudra dans un moment une équation qu'on ne pourroit pas résoudre par les formules ordinaires dans un jour entier de calcul. Car il est aisé de comprendre que quelque petite que soit la valeur cherchée, elle peut-être multipliée par un nombre indéfiniment grand, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette même valeur sera égal à un homogene indéfiniment grand, ce qui demande suivant la formule une suite d'operations indéfiniment longues; ce qu'on évitera par le moien de cette remarque qui s'applique également à la formule $-xx+ax=bb$.

Ceci paroît encore plus sensiblement dans la troisiéme formule $xx - ax = bb$; car lorsqu'ax est le terme dominant, il n'y a qu'à supposer $x = a + \frac{bb}{a}$. Par exemple, soit l'équation proposée $xx - 54876x$ 384181, il n'y a qu'à supposer $x = 54876 + \frac{384181}{54876}$ } 7 ou 54883 ; & lorsque bb est plus petit que a, il n'y a qu'à supposer bb nul, & l'on aura x égal à a pour valeur approchée.

Lorsque l'homogene au contraire est le terme dominant, on peut negliger le coefficient, & ne faire qu'une simple extraction de racine de l'homogene.

L'on ne doit donc se servir de la méthode ordinaire que lorsqu'il n'y a aucun terme qui domine sensiblement, encore y auroit-il beaucoup d'autres remarques à faire pour trouver la valeur ou les deux valeurs cherchées le plus promptement qu'il soit possible dans chaque cas.

* Pag. 302. in 4. * Mais dans les équations du second degré si le chemin qu'on tient en suivant les formules est souvent trop long & trop pénible, on a du moins l'avantage d'être assuré qu'on arrivera au but. C'est ce qui ne se trouve pas dans les équations du troisiéme & du quatriéme degrez, dont la plus grande partie est absolument inexprimable, & le reste est exprimé d'une maniére si obscure & si embarrassée, qu'il vaudroit beaucoup mieux laisser l'équation dans l'état où elle est proposée, que de la résoudre de cette maniére. Je dis que la plus grande partie est absolument inexprimable, parceque toute expression où il entre des nombres imaginaires, chime-

meriques & contradictoires doit passer pour nulle, puisqu'elle ne peut servir à trouver la valeur cherchée de la racine; & il faut remarquer qu'on ne tombe dans ces imaginaires que par le mauvais choix qu'on fait d'un terme non dominant comme s'il étoit dominant, & qu'il dût servir principalement à trouver la racine au lieu qu'on auroit dû s'attacher à un autre terme. C'est ce que je vais tâcher d'expliquer à fonds.

On peut réduire aux trois formules suivantes toutes les équations du troisiéme degré.

$$x^3 = ax + b$$
$$x^3 = ax - b$$
$$x^3 = -ax + b$$

Je n'examine pas ici si cette réduction est le meilleur & le plus court chemin pour résoudre ces équations; car ce qui est le plus simple & le plus commode à retenir pour le Lecteur, ou le plus aisé à traiter pour l'Auteur, n'est pas toujours le plus facile pour le Calculateur. C'est pourtant ce qu'on devroit avoir uniquement en vûe.

Dans la premiére formule $x^3 = ax + b$ le nombre des équations qu'on peut former en entier sur une même valeur est déterminé. Par exemple, si je suppose x égal à 100, je pourrai former toutes les équations suivantes,

à commencer par $x^3 = 0x + 1000000$ exclusivement.
$x^3 = 1x + 999.900$
$x^3 = 2x + 999.800$
* $x^3 = 3x + 999.700$
&c. = &c. + &c.

* Pag. 303. in 4.

Premiére Epoque. $x^3 = 300x + 970.000$
$x^3 = 301x + 969.900$
$x^3 = 302x + 969.800$
&c. = &c. + &c.

Seconde Epoque. $x^3 = 7500x + 250000$
$x^3 = 7501x + 249.900$
$x^3 = 7502x + 249.800$
&c. = + &c.

Troisiéme Epoque. $x^3 = 9800x + 20000$
$x^3 = 9801x + 19900$
$x^3 = 9802x + 19800$
&c. = &c. + &c.

& finir par $x^3 = 10000x + 0$ exclusivement.

Le nombre des équations possibles est donc égal au quarré de l'inconnue moins un.

L'homogene de comparaison est le terme dominant depuis $x^3 = 1x + 999900$ jusqu'à $x^3 = 7500x + 250000$, & il est tellement dominant que jusqu'à $x^3 = 300x + 970000$ qui est la premiere Epoque, c'est-à-dire jusqu'à ce que le coefficient soit triple de la racine, il suffit de tirer la racine cubique prochainement plus grande de cet homogene pour avoir la valeur cherchée. Ainsi pour résoudre cette équation $x^3 = 200x + 980.0_{\smile}0$ je neglige $200x$, & je tire simplement la racine cubique de 980000 prochainement plus grande, & c'est 100.

Dans l'équation $x^3 = 750cx + 250000$ qui est la seconde Epoque, & où le coefficient est égal aux trois quarts du quarré de la racine, & l'homogene égal au quart du cube de cette même racine: ces deux termes dominent dans une parfaite égalité, ou plutôt aucun des deux ne domine, & l'on peut également trouver la racine ou par l'extraction de la racine quarrée des quatre tiers du coefficient, ou par l'extraction de la racine cubique du quadruple de l'homogene. Jusques-là le cas est réductible suivant la formule de *Tartalea* $x^3 = ax + b$.

Donc

*Donc $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$. *Pag. 304. in 4.

Mais cette formule a deux ou trois défauts: Le premier d'engager inutilement à plusieurs extractions de racines quarrées & cubiques, lorsqu'on peut en plusieurs cas ne faire qu'une seule extraction de racine cubique, comme je viens de le faire voir dans l'équation $x^3 = 200x + 980000$.

Le second de donner sous une formule irrationelle des valeurs rationelles, ce qui oblige après un long calcul de vérifier par la substitution si la racine rationelle trouvée est exacte, & ce défaut ne se trouve pas dans le second degré.

Le troisiéme défaut est que l'expression de la racine est si peu naturelle, si obscure & si envelopée, qu'elle est en quelque maniére connue plus distinctement dans l'équation même avant qu'aprés sa résolution.

En effet soit l'équation $x^3 = 6x + 464$, dont la racine 8 est exprimée suivant la formule par $\sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$. Je dis & je soûtiens que tout esprit attentif & libre de préjugez, apperçoit plus clairement ou plutôt moins confusément la valeur de l'inconnue $x = 8$ dans l'équation $x^3 = 6x + 464$ que dans la formule $x = \sqrt[3]{232 + \sqrt{53816}} + \sqrt[3]{232 - \sqrt{53816}}$; car dans l'équation il ne s'agit que de trouver un nombre dont le cube soit égal à 464 plus six fois sa racine, au lieu que suivant la formule il faut trouver, 1°. Un nombre dont le quarré soit égal à 53816, c'est-

à dire qu'il faut tirer la racine quarrée de ce nombre, ce qui ne se peut faire exactement dans cet exemple. 2°. Il faut après avoir ajoûté la racine trouvée à 232, trouver un second nombre dont le cube soit égal à cette somme. 3°. Après avoir ôté cette même racine de 232, il faut trouver un troisiéme nombre dont le cube soit égal à la différence, & la somme de ces deux derniers nombres fera la racine cherchée. Voilà donc trois nombres inconnus à trouver dans la formule, au lieu * d'un seul qu'il faut trouver dans l'équation: encore est-il impossible de trouver exactement aucun de ces trois nombres dès que le premier 53816 ou en général $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3$ n'est pas un quarré parfait.

* Pag. 305. in 4.

Or j'ai démontré dans mes *Elémens d'Algebre* que ce quarré n'étoit parfait qu'en autant d'équations que la moitié de la racine contient d'unitez, c'est-à-dire, que si la racine est 8 comme dans l'exemple ci-dessus, il n'y a que quatre équations, où la formule donne la valeur cherchée après une extraction de racine quarrée, une addition, une extraction de racine cubique, une soustraction, une seconde extraction de racine cubique & une addition; & pour parvenir à cette formule il faut prendre la moitié d'un nombre, la quarrer, prendre le tiers d'un autre nombre & le cuber, & soustraire ce cube du quarré; ce qui fait en tout onze operations dans le cas le plus favorable. Or le nombre des équations possibles étant $xx - 1$, & celui des équations où la formule donne la valeur cherchée sans déguisement étant seulement $\frac{1}{2}x$ lorsque le nombre cherché est pair, ou $\frac{1}{2}x - 1$ lorsqu'il est impair; il est évident qu'il y a une in-

infinité plus de cas où la formule donne la valeur de la racine déguisée; qu'il n'y en a où elle la donne pure & simple telle qu'elle est. Car $\frac{1}{2}x$ ou $\frac{1}{2}x-1$ est un infiniment ou indéfiniment petit par raport à $xx-1$: Mais, dira-t-on, quelque déguisée ou envelopée que soit la valeur de la racine elle est exacte & tout y est connu, au lieu que dans l'équation le raport de la racine ou de son cube à un nombre donné n'est pas immédiatement connu, & ce raport est mêlé & composé avec le raport du coefficient multiplié par la racine même. Je répons,

1°. Que c'est une erreur & un préjugé de croire que la racine est connue lorsqu'on en connoit le quarré, le cube, ou telle autre puissance qu'on voudra. On ne connoit cette racine qu'après l'extraction faite, & il y a une infinité de cas où cette extraction est imparfaite.

2°. Je conviens que cette équation $x^3=464$ est plus simple & plus aisée à résoudre que celle-ci $x^3=6x+464$. *Mais cette derniere toute seule, quoiqu'affectée d'un terme moien, me paroit plus simple, plus connue, ou pour ainsi dire plus connoissable que ces trois-ci jointes ensemble $yy=53816$, $z^3=232+y$, & $u^3=232-y$; d'où résulte $x=z+u$ suivant la formule, ou si l'on veut $x=2t$, & $t^3+3rrt=232$; & $r^3+3ttr=\sqrt{53816}$.

* Pag. 306. in

Depuis la seconde Epoque $x^3=7500x+250000$ jusqu'au dernier cas $x^3=10000x+0$ exclusivement, c'est ce qu'on appelle le cas irreductible, parce qu'il ne peut pas être résolu suivant la formule de *Tartalea*: le terme dominant est le coefficient, & il est tellement dominant depuis la troisiéme Epoque $x^3=9800x+20000$, qu'on peut absolument négli-

ger l'homogene de comparaiſon; & tirer ſimplement la racine quarrée approchée du coefficient pour avoir la racine cherchée en y ajoûtant une unité. Cette Epoque commence à l'endroit où l'homogene de comparaiſon eſt égal au double du quarré de la racine, & le coefficient égal au quarré de cette racine moins le double de cette même racine; ainſi pour réſoudre cette équation $x^3 = 9801x + 19900$, je tire la racine quarrée de 9801, comme ſi j'avois ſeulement $x^3 = 9801x$ ou $xx = 9801$, la racine eſt 99 que j'augmente d'une unité. la ſomme 100 eſt la racine cherchée.

Je donnerai la méthode générale de réſoudre toutes ces équations, & principalement celles qui ſont compriſes entre la ſeconde & la troiſiéme Epoque qui ſont les ſeules difficiles.

Dans la ſeconde formule $x^3 = ax - b$, ſuppoſant toujours $x = 100$, on peut former cette ſuite infinie d'équations,

à commencer par $x^3 = 10000 - 0$ excluſivement.
$x^3 = 10001x - 100$
$x^3 = 10002x - 200$
&c. = &c. — &c.

Premiére Epoque. $x^3 = 10200x - 20000$
$x^3 = 10201x - 20100$
$x^3 = 10202x - 20200$
&c. = &c. &c.

Où la racine quarrée du coefficient commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

* Seconde Epoque. $x^3 = 30000x - 2000000$.
$x^3 = 30001x - 2000100$
$x^3 = 30002x - 2000200$
&c. = &c. — &c.

* Pag. 307. in 4.

Juſqu'ici le nombre 100 eſt la plus grandeur valeur d'x, après quoi il devient la plus petite.

Point de partage où le coefficient 30000 eſt le triple du quarré de la racine, & l'homogene 2000000 eſt le double de ſon cube.

Troi-

Troisiéme $x^3 = 30300x - 2030000$

Epoque. $x^3 = 30301x - 2030100$. Les deux valeurs sont 100 & 101.

$x^3 = \&c. - \&c.$

$x^3 = 3004x - 2060400$. Les deux valeurs sont 100 & 102.

$x^3 = \&c. - \&c.$

$x^3 = 89869x - 7986900$. Les deux valeurs sont 100 & 237.

$\&c. = \&c. - \&c.$

Où le coefficient surpasse le triple du quarré du triple de la racine, & où les deux valeurs commencent immédiatement après à se surpasser d'une unité.

& ainsi de suite à l'infini.

Ces racines ont donc un terme fixe de petitesse, & n'en ont aucun de grandeur.

Le nombre des équations possibles pour la même & plus grande racine est égal au double du quarré de l'inconnue dans l'exemple ci-dessus, c'est depuis $10001x$ jusqu'à $30000x$. Le coefficient commence dans la seconde formule là où il finit dans la premiére.

Enfin dans la troisiéme formule $x^3 = b - ax$ le nombre des équations est absolument infini;

à commencer par $x^3 = 1000000 - 0x$ exclusivement.

$x^3 = 1000100 - 1x$

$x^3 = 1000200 - 2x$

$x^3 = \&c. - \&c.$

$x^3 = 1030300 - 303x$

$x^3 = 1030400 - 304x$

$x^3 = 1030500 - 305x$

$x^3 = 1030600 - 306x$

$x^3 = \&c. - \&c.$ & ainsi de suite à l'infini.

Epoque où la racine cubique de l'homogene commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

Cette derniere formule peut être pleinement résolue par la regle de *Tartalea*, ainsi je ne m'y arrêterai pas.

Il y a donc le quart des équations de la premiére formule qui est dans le cas irreductible, & la seconde formule y est toute entiere sui-

vant ce que j'ai démontré dans mes *Elémens d'Aritmethique & d'Algebre*. J'ajoûterai ici que du quart irreductible de la premiére formule
* Pag. 308. in 4. * qui tombe dans les imaginaires, il y en a autant d'imaginaires rationels que la douziéme partie du quarré de l'inconnue contient d'unitez dans sa racine; ainsi l'inconnue étant 100, son quarré est 10000; & la douziéme de ce quarré est 833⅓, dont la racine approchée en entiers est 28 : c'est-pourquoi je dis qu'on pourra former 28 équations dans cette premiére formule du troisiéme degré où les imaginaires seront rationels, & pas davantage : ce seront les équations où x est égal à

$$\underline{50 + - 1} + \underline{50 - - 1}$$
$$\underline{50 + - 2} + \underline{50 - - 2}$$
$$\underline{50 + - 3} + \underline{50 - - 3}$$
$$\&c. + \&c.$$
$$\underline{50 + - 28} + \underline{50 - - 28}$$

Cette remarque quoiqu'assez curieuse par raport à la Théorie n'est d'aucun usage dans la pratique, parce qu'on connoit aussi peu la valeur des imaginaires rationaux que celle des irrationaux.

Dans la seconde formule $x^3 = ax - b$ il y a toujours deux racines positives & une négative qui est la somme des deux positives, & cette racine négative devient la seule positive de l'équation $x^3 = ax + b$, & au contraire les deux racines négatives de celle-ci sont les deux positives de l'autre.

L'ordre veut qu'on cherche toujours la petite racine la premiére comme la plus aisée à trouver;

ver; mais dès qu'on en connoit une, on trouvera aisément l'autre par cette formule.

Soit c une des racines de l'équation $x^3 = ax - b$, l'autre sera $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$. Par exemple,

Soit l'équation $x^3 = 19x - 30$. Soit $19 = a$, & qu'une des valeurs d'x donnée soit $2 = c$; donc $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c = \sqrt{19 - 3} - 1 = \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$ seconde valeur cherchée.

Et au contraire soit la valeur donnée $3 = c$, on aura $\sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c = \sqrt{19 - 6\frac{3}{4}} - 1\frac{1}{2} = \sqrt{12\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 2$ valeur cherchée.

* Pour le démontrer il n'y a qu'à former l'équation des trois racines.

* Pag. 399. in 4.

$x - c = 0$,
$x - d = 0$,
$x + c + d = 0$, l'on trouvera $d = \sqrt{a - \frac{3}{4}cc} - \frac{1}{2}c$, & réciproquement $c = \sqrt{a - \frac{3}{4}dd} - \frac{1}{2}d$.

Je commence par résoudre la seconde formule $x^3 = ax - b$, parce qu'elle est toute entiere dans le cas irreductible, & que par cette raison elle a toujours été regardée comme la plus difficile, & qu'elle est d'ailleurs la plus utile par raport à la trissection de l'angle qui s'y réduit.

REGLE GENERALE.

Soit l'équation donnée $x^3 = ax - b$.

RESOLUTION UNIVERSELLE EN LETTRES.

1°. $x = \frac{b}{a} = c$ & $a - cc = d$.

2°. $x = c + \frac{b - cd}{a - 3cc} = e$ & $a - ee = f$.

3°. $x = e + \frac{b - ef}{a - 3ee} = g$ & $a - gg = h$, & ainsi de suite.

REMARQUE I.

On abregera la seconde équation en prenant $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$ au lieu de $c - \frac{b - cd}{a - 3cc}$; car $c^3 = b - cd$ puisque $d = a - cc$ & $c = \frac{b}{a}$.

REMARQUE II.

Lorsqu'on ne veut pas négliger les fractions, on aura,

1°. $\frac{b}{a}$ premier membre de la racine.

2°. $\frac{b^3}{\overline{a^3 - 3bb} \times a}$ second membre, & $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{\overline{a^3 - 3bb} \times a} = \frac{\overline{a^3 - 2bb} \times b}{\overline{a^3 - 3bb} \times a} = \frac{c}{d}$.

3°. $\frac{\overline{bd - ac} \times dd + c^3}{\overline{add - 3cc} \times d}$ troisiéme membre, & $\frac{c}{d}$ + ce troisiéme membre $= \frac{e}{f}$.

4°.

*4°. $\frac{\overline{bf - ae} \times ff + e^3}{\overline{aff - 3ee} \times f}$ quatriéme membre, & ainsi de suite. *Pag. 310. in 4°.

REMARQUE III.

Il faut que a^3 soit égal ou plus grand que $\frac{1}{4}bb$, autrement l'équation seroit impossible suivant ce qui a été démontré par *Schooten* & plusieurs autres. Dans le cas d'égalité $\frac{1}{27}a^3 = \frac{1}{4}bb$, on aura $x = \sqrt{\frac{1}{3}a} = \sqrt{\frac{1}{2}b}$. Dans le cas d'inégalité la racine sera d'autant plus aisée à trouver que a^3 aura un plus grand raport à bb.

RESOLUTION EN NOMBRES.

Je suppose que a & b sont les nombres entiers, & qu'on cherche la valeur d'x en nombres entiers.

1°. Prenez en nombres entiers prochainement plus grands les valeurs de tous les quotiens $\frac{b}{a}$, $\frac{b - cd \text{ ou } c^3}{a - 3cc}$, $\frac{b - ef}{a - 3ee}$, &c.

2°. Dès que le produit cd ou ef &c. se trouvera égal à b, la question est résolue, & on aura la valeur exacte d'x en entiers.

3°. Dès que ce produit cd ou ef &c. aiant été plus petit que b dans l'operation précédente se trouve plus grand dans la suivante, la question est aussi résolue, la valeur d'x est irrationelle, & on a sa valeur en entiers à moins d'une unité près.

4°. Lorsque ce produit approche fort de la valeur de b, on peut prendre pour diviseur $a - 3cc - 2c - 1$ au lieu de $a - 3cc$, ce qui épargnera quelquefois une operation.

5°.

5°. Au lieu de prendre d'abord $\frac{b}{a}$ on peut prendre telle valeur plus grande en entiers qu'on voudra, pourvû qu'elle soit plus petite que la valeur d'x; ce qui se connoitra aisément par le raport des $b - cd$ ou c^3 comparé au diviseur $a - 3cc$.

6°. Lorsque les nombres a & b sont tels qu'un même nombre qui mesure a par son quarré, mesure b par son cube, on pourra réduire l'équation en moindres termes.

* Pag. 311. in 4 * Ainsi $x^3 = 300x - 2000$ se réduit à $y^3 = 3y - 2$, & pour lors $x = 10y$. Cette remarque est générale pour toutes les équations.

7°. On peut couper a en tranches de deux chifres, & b en tranches de trois chifres de droit à gauche, & operer d'abord seulement sur la première tranche de l'un & de l'autre; car on abregera par-là l'operation par raport au premier membre de la racine lorsqu'elle est fort grande.

8°. Lorsque $3cc$ ou $3ee$ &c. se trouvent plus grands que a, l'équation est impossible.

9°. Lorsque la racine est irrationelle on la trouvera en entier à moins d'une unité près, & on pourra en approcher à l'infini en fractions.

I. EXEMPLE.

Soit $x^3 = 52416x - 1244160$.

C'est l'exemple d'*Harriot* pages 146, 147 & 148 de son *Exegetique numerique*.

J'ai donc $a = 52416$

$b = 1244160$

Donc $\frac{b}{a} = \frac{1244160}{52416} = 23+$. Je prends sui-

vant

vant la regle ci-dessus, article premier, le nombre 24 pour premier membre de la racine, je le quarre, c'est $576 = cc$ que j'ôte de $52416 = a$, & j'ai $a - cc = 51840 = d$ que je multiplie par le même $24 = c$, le produit est 1244160 qui se trouve $= b$; d'où je conclus suivant l'article second de la même regle que la racine cherchée est 24.

Pour trouver la seconde racine je prends la moitié de 24, c'est 12 que je quarre, c'est 144 que je triple, c'est 432 que j'ôte de 52416, il reste 51984 dont la racine quarrée est 228 dont j'ôte le même 12, le reste 216 est la seconde racine cherchée.

La méthode d'*Harriot* & de *Viete* demande trois pages *in folio* de calcul.

II. EXEMPLE.

Soit l'équation $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 300x - 1000$, * ou $x^3 = 30000x - 1000000$ &c. qui sont des équations géométriquement semblables du côté de l'octodecagone, dont le rayon est 1 ou 10 ou 100 &c. *Pag. 312. in. 4.

J'aurai 1°. $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$ &c. premier membre.

2°. $\frac{c^3}{a - 3cc} = \frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a} = \frac{1}{72} = 013\frac{8}{9}$ &c. second membre.

3°. $\frac{bd - ac \times dd + c^3}{add - 3cc \times d} = \frac{75}{984744} = 00007413 +$ troisiéme membre, ce qui donne pour le côté cherchée 34729. 635 + &c.

RE-

REMARQUE.

On peut toujours préparer l'équation par cette formule de la bissection de l'angle $4xx - \frac{x^4}{aa} = bb$ dans laquelle a représente le rayon, b la corde de l'arc double, & x la corde de l'arc simple; on peut, dis-je, préparer l'équation de maniére que la résolution soit aussi promte & même plus promte que celle-ci.

Soit l'équation donnée dans le cas irreductible de la premiere formule $x^3 = aax + b$.

FORMULE UNIVERSELLE.

$$x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd - b}{3cc - aa} - \frac{ef - b}{3ee - aa} \&c.$$

$$a + \frac{b}{2aa} = c.$$

$$cc - aa = d.$$

$$ee - aa = f.$$

&c.

c'est-à-dire que le premier membre de la racine est $a + \frac{b}{2aa} = c$ trop grand. On suppose ensuite $cc - aa = d$, & le second membre négatif ou à soustraire est $\frac{3cc - aa}{cd - b}$. Soit ensuite $c - \frac{cd - b}{3cc - aa} = e$, & $ee - aa = f$. Le troisiéme membre à soustraire est $\frac{ef - b}{3ee - aa}$, & ainsi de suite jusqu'à * ce qu'on trouve une racine exacte en entier ou une racine approchée à moins d'une unité près lorsque cette racine est irrationelle.

* Pag. 313 in.4.

Ex-

EXEMPLE.

Soit l'équation donnée $x^3 = 7569x + 243100$, j'ai donc $aa = 7569$ & $a = 87$ & $b = 243100$.

$$a + \frac{b}{2aa} = 87 + \frac{243100}{15138} \left\{ 16 - = 103 - = c. \right.$$

15138
91720
15138

Donc $cc = 10609$ & $3cc = 31827$
$-aa = 7569 \quad -aa = 7569$

Donc $cc - aa = 3040 = d$ 24258 ou
multiplié par $c = 103$ $3cc - aa$.

9120
3040

produit $cd = 313120$
$-b = 243100$

$cd - b = 70020(3$ — second membre,

divisé par $3cc - aa = 24258$.

Le premier membre est donc 103 & le second — 3, il reste 100 pour la racine que je quarre, c'est 10000 dont j'ôte 7569, il reste 2431 que je multiplie par 100, le produit 243100 est égal à l'homogene b donné, ainsi 100 est la racine cherchée.

REMARQUE.

Pour conserver l'analogie entiere on pourroit supposer,

Le premier membre $= a$ & $aa - aa = o$.

Le

Le 2e $= -\frac{aa-b}{3aa-aa} = +\frac{b}{2aa}$ & $a + \frac{b}{2aa} = c$.

Le 3e $= -\frac{cd-b}{3cc-aa}$ & $c - \frac{cd-b}{3cc-aa} = e$.

Le 4e $= -\frac{ef-b}{3ee-aa}$, & ainsi de suite.

*Pag. 314. in 4.

* REMARQUE II.

Lorsque $cd = b$ ou $ef = b$ &c. la question est résolue, c'est-à-dire que la racine cherchée est c ou e &c.

REMARQUE III.

On suppose toujours l'équation préparée à l'ordinaire sans fraction & sans incommensurables, & si l'on veut pour une plus grande facilité sans coefficient à la haute puissance. Cette derniere préparation n'est pas absolument nécessaire, & si l'on avoit $cx^3 = aax + b$, il faudroit prendre pour premier membre au lieu d'a $\frac{\sqrt{aa}}{c}$, ce qui ne change rien à la méthode.

EXEMPLE IV.

Au lieu de la fraction $\frac{b}{2aa}$ on peut prendre $\frac{b}{2aa+3a+1}$, ce qui abrege un peu en quelques occasions; mais comme $3a+1$ est un infiniment petit à l'égard de la quantité constante $2aa$, on peut le négliger.

RE-

REMARQUE V.

Il faut prendre en entiers les quotiens $\frac{b}{2aa}$, $\frac{cd-b}{3cc-aa}$, $\frac{ef-b}{3ee-aa}$, le premier par défaut & les autres par excès.

REMARQUE VI.

On sera surpris que le premier membre de la racine se trouve plus grand que la racine même; mais ce n'est qu'un préjugé, & pourvu qu'on trouve promptement cette racine, il est indifférent que ce soit par addition ou soustraction.

Soit l'équation $x^3 = axx - b$.

On aura pour premier membre $a - \frac{ab}{a^3 - 2b} = c$

& $a - c = d$.

Pour second membre . . $d - \frac{b - ccd}{3cc - 2ac} = e$

& $a - e = f$.

Pour troisiéme membre . . $e - \frac{b - eef}{3ee - 2ae}$ &c.

ou bien pour * premier membre a, pour second $- \frac{ab}{a^3 - 2b}$ &c. * Pag. 315. in 4.

EXEMPLE.

On demande la secante de 80 degrez ou des $\frac{2}{9}$ de la circonférence du cercle.

Le rayon étant 1 le sinus de 10d ou de la $\frac{1}{36}$ partie du cercle est la moitié du côté de l'octo-de-

decagone, lequel côté est la petite racine de l'équation $x^3 = 3x - 1$, & la secante de 80[d] est le double d'une valeur d'y dont $y^3 = 3yy - 1$; & il en est de même de toutes les secantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la trissection de l'angle.

J'ai donc $a = 3$ & $b = 1$, & par conséquent $a - \frac{ab}{a^3 - 2b} = 3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$, donc $cc = \frac{5184}{625}$, donc $a - c = d = 3 - \frac{72}{25} = \frac{3}{25}$, donc $ccd = \frac{15552}{15625}$ que j'ôte de $b = 1$, il reste $\frac{73}{15625}$ que je divise par $3cc - 2ac = \frac{15552}{625} = \frac{432}{25}$, c'est-à-dire par $\frac{118800}{15625}$, le quotient est $\frac{73}{118800}$ que j'ôte de $\frac{72}{25}$, il reste $\frac{342071}{118800} = 2.\ 879385^{vi} -$ &c. dont le double $5.\ 758770^{vi} -$ est effectivement la secante de 10[d] conformément aux Tables.

DEMONSTRATION.

Pour la formule $x^3 = ax - b$.

Cubez a & quarrez b & divisez a^3 par bb, si le quotient est $6\frac{3}{4}$ (il ne peut jamais être moindre suivant ce qui a été démontré par *Schooten*, comme j'ai déja dit ci-dessus) la racine sera $\frac{3b}{2a}$. Car soit $a = 3cc$ & $b = 2c^3$, on aura l'équation $x^3 = 3ccx - 2c^3$, le cube de $3cc$ est $27c^6$ & le quarré de $2c^3$ est $4c^6$ & le quotient $\frac{27c^6}{4c^6} = 6\frac{3}{4}$.

Or

Or lorsque $x^3 = 3ccx - 2c^3$, il est évident que $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$; car en substituant c à la place d'x, on aura $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$.

2°. On démontrera de même que si le quotient $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$ * la racine ou plutôt une des racines sera $\frac{4b}{3a}$, comme si l'équation est $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $a = 4cc$ & $b = 3c^3$, & par conséquent $a^3 = 64c^6$ & $bb = 9c^6$; donc $\frac{a^3}{bb} = \frac{64c^6}{9c^6} = 7\frac{1}{9}$ & $\frac{4b}{3a} = \frac{12c^3}{12cc} = c$. Il est évident que $x = c$; car en substituant c à la place d'x dans l'équation $x^3 = 4ccx - 3c^3$, on aura $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$

* Pag. 316. in 4.

3°. Si le quotient est $7\frac{13}{16}$, une des racines sera $\frac{9b}{4a}$.

Si ce quotient est $8\frac{16}{25}$, on aura pour racine $\frac{6b}{5a}$.

Si ce quotient est $9\frac{19}{36}$, on aura $\frac{7b}{6a}$.

Si ce quotient est $10\frac{22}{49}$, on aura $\frac{8b}{7a}$.

Si ce quotient est $11\frac{25}{64}$, on aura $\frac{9b}{8a}$.

&c.

Et universellement si le quotient $\frac{a^3}{bb} = c + \frac{3c - 8}{\overline{c - 3}^2}$ ou $= c + \frac{3c - 8}{cc - 6c + 9}$, la racine sera $\frac{\overline{c - 2} \times b}{\overline{c - 3} \times a}$.

Mais

Mais si le quotient ne se trouve pas dans la suite de cette progression, la racine cherchée sera nécessairement entre les deux termes prochains de cette même progression; ainsi lorsque ce quotient est 27 comme dans l'équation de l'octodecagone $x^3 = 3x - 1$, ou $x^3 = 12x - 8$, ou $x^3 = 27x - 27$, ou $x^3 = 48x - 64$ &c. $x^3 = 300x - 1000$ &c. la racine cherchée est entre $\frac{25b}{24a}$ & $\frac{24b}{23a}$, parceque lorsque $x = \frac{24b}{23a}$ le quotient $\frac{a^3}{bb} = 26\frac{70}{529}$, & lorsque $x = \frac{25b}{24a}$ le même quotient $\frac{a^3}{bb}$ est égal à $27\frac{73}{576}$ suivant la formule $c + \frac{3c-8}{c-3}$, pour le quotient, & suivant la formule $\frac{\overline{c-2} \times b}{\overline{c-3} \times a}$ pour la racine. Ces deux formules commencent par $5\frac{7}{4}$. $6\frac{10}{9}$. $7\frac{13}{16}$ continuant à l'infini. On a donc pour premiers membres de la racine cherchée $\frac{\overline{c-2} \times b}{\overline{c-3} \times a}$; & parceque $c = \frac{a^3}{bb}$ par l'hypothese, la fraction $\frac{3c-8}{c-3}$ étant un indéfiniment * petit par raport aux quantitez constantes a, b, c, si l'on substitue $\frac{a^3}{bb}$ à la place de c dans l'équation $\frac{\overline{c-2} \times b}{\overline{c-3} \times a}$, on aura $\frac{a^3b - 2b^3}{a^4 - 3abb}$, ou $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^4 - 3abb}$, ou $+ \frac{b^3}{\overline{a^3 - 3bb} \times a}$. Si l'on suppose $\frac{b}{a} = s$ (c'est une nouvelle valeur

* Pag. 317. in 4.

leur de c différente de la formule $\frac{c - 2 \times b}{c - 3 \times a}$) & qu'on substitue cette valeur dans la fraction $\frac{b^3}{a^3 - 3bb \times a}$, on aura pour premiers membres de la racine cherchée cette valeur $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$ qui est précisément la valeur trouvée par la regle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour trouver ensuite les autres membres $e + \frac{b - ef}{a - 3ee}$ &c. je suppose $c + \frac{c^3}{a - 3cc} = e$, ou $ax - x^3 = b$. Or puisque e est plus petit que x, il s'ensuit nécessairement que l'homogene de comparaison pour $ae - e^3$ sera plus petit que l'homogene de comparaison pour $ax - x^3$, c'est-à-dire que le premier sera plus petit que b. Soit donc $a - ee = f$, il s'ensuit que f est plus petit que b, & $b - ef$ est la différence des deux homogenes de comparaison pour les équations semblables,

$$ax - x^3 = b. \quad ae - ee.$$
$$ae - e^3 = ef = a - ee \times e.$$

Enfin pour avoir un troisiéme homogene, puisque x est un nombre entier & que e est plus petit, je ne puis pas supposer moins pour x que $e + 1$ que je substitue dans l'équation $ax - x^3 = b$, ou $a - xx = \frac{b}{x}$, ce qui me donne $ae + 1a - eee - 3ee - 3e - 1 = d$, & si $d = b$ la question est résolue, & $x = e + 1$; mais si l'homogene d est encore plus petit que b, il est évidemment plus grand que ef, parceque l'homogene de comparaison augmente à mesure

 que

que la racine qui le forme augmente, & d eſt formé par $e+1$, & ef ſeulement par e: c'eſt-pourquoi je fais une regle de 3, & je dis la différence des homogenes* $ae-e^3=ef$ & $ae-e^3-3ee-3e-1+1a=d$ eſt $a-3ee-3e-1$. Celle des homogenes $ax-x^3=b$ & $ae-e^3=ef$ eſt $b-ef$. La différence des racines e & $e+1$ qui ont formé les homogenes ef & d eſt 1. Je dis donc ſuivant la regle de la premiére partie de ce Traité, ſi $a-3ee-3e-1$ différence dans l'homogene vient de 1 différence dans les racines, de combien viendra $b-ef$? Le quotient $\frac{b-ef}{a-3ee-3e-1}$ donnera le troiſiéme membre de la racine; mais parceque $3e+1$ eſt un infiniment petit par raport aux quantitez conſtantes a & b, ef, je ne prends univerſellement que $\frac{b-ef}{a-3ee}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

* Pag. 318. in 4.

Il me reſte à prouver que ce troiſiéme membre & la ſuite des autres qu'on peut trouver de la même maniére à l'infini, forment une ſomme plus petite que la racine, & qui en approche à l'infini lorſqu'elle eſt irrationelle, & c'eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter en ces matieres.

Soient trois équations ſemblables.

$x^3=ax-b$. & ſoit $y=x+e$.

$y^3=ay-c$. & $z=y+f=x+e+f$.

$z^3=az-d$.

Je dis que ſi l'on fait comme $c-b : d-c :: y-x$ à une quatriéme quantité $\frac{d-c \times y-x}{c-b}$; la com-

composée $y + \frac{\overline{d-c} \times \overline{y-x}}{c-b}$ sera plus petite que z ou que $x+e+f$. Car en substituant on aura $ax - x^3 = b$.
& $ay - y^3 = c$.
ou $ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c$.
Donc $c - b = ae - 3exx - 3eex - e^3$ &c. & enfin on aura $\frac{afe - f^3e - 3ffex - 3ffee - 3fexx - 6eefx - 3fe^3}{ae - 3exx - 3eex - e^3}$ qui est plus petit que f, puisqu'il reste tous termes négatifs.

On prouvera de la même maniére que cette différence deviendra plus petite qu'aucune quantité donnée, & que par conséquent on peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorsqu'elle est irrationelle.

Enfin non seulement tous les autres cas réductibles ou *irreductibles du troisiéme degré, mais généralement toutes les équations se peuvent résoudre par les mêmes principes, c'est-à-dire par la regle de trois appliquée à la différence des homogenes & à celles des valeurs qui les ont produits, ce qui est trop évident pour s'arrêter à le démontrer en detail.

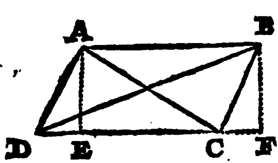
* Pag. 319. in 4.

SUR UNE PROPOSITION DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

PAR M. DE LAGNY.

THEOREME.

†DANS tout parallelogramme la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez.



Si le parallelogramme est rectangle, la proposition est évidente par la 47 p. 1. Il faut la prouver dans les obliquangles.

Soit le parallelogramme obliquangle *ABCD* compris sous les quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, dont les côtez opposez sont *AB*, *CD*, & *AD*, *BC*; la grande diagonale *BD* & la petite *AC*. Je dis que la somme des quarrez des deux diagonales *BD*, *AC*, est égale à la somme des quarrez des quatre côtez *AB*, *BC*, *CD*, *DA*.

PREPARATION.

Du point *A* de l'angle obtus *DAB* soit abbaissée sur le côté *CD* la perpendiculaire *AE*, & du point *B* sommet de l'angle aigu *ABC* sur *DC* prolongé en *F* la perpendiculaire *BF*.

DE-

† 28. Juillet 1706.

*DEMONSTRATION. * Pag. 320 in 4.

Les triangles *ADE*, *BCF*, sont égaux & semblables, puisque *AD* est égale à *BC*, & les angles *ADE*, *BCF*, de même que *AED*, *BCF*, sont aussi égaux, donc *DE* est égal à *CF*. Or par la 12. p. 2. dans le triangle obtusangle *BDC*, le quarré du côté *BD* est égal à la somme des quarrez de *BC* & de *CD*, plus le double du rectangle de *CF* par *CD*; & par la 13. p. 2. dans le triangle *DAC*, le quarré du côté *AC* est égal à la somme des quarrez de *AD* & de *CD*, moins deux fois le rectangle du même *CD* par *DE* égal à *CF*. Donc l'excès compensant précisément le défaut, la somme des quarrez des deux diagonales est égale à la somme des quarrez des quatre côtez. *Ce qu'il falloit démontrer.*

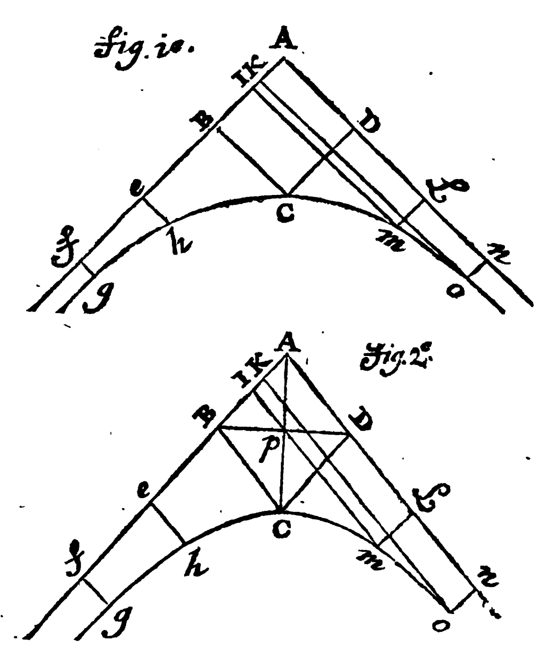
COROLLAIRE I.

Dans tout rhombe ou lozange connoissant un côté & une diagonale, on connoîtra l'autre diagonale. Car puisque les quatre côtez sont égaux, il n'y a qu'à ôter le quarré de la diagonale donnée du quadruple du quarré du côté, le reste sera le quarré de la diagonale cherchée.

USAGE.

Soit un quadrilatere équilateral quelconque *ABCD* rectiligne & sur un plan indéfini.

* Si l'on prolonge indéfiniment chacun des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, & que prenant à discretion un point autre que *B* & *D* sur ces * Pag. 321. in 4.



côtez prolongez, par exemple le point *e*, on tire *eb* parallele à *BC*, & qu'on fasse comme *Ae* est à *AB*; ainsi *BC* à *eb*, ou que prenant entre *A* & *B* un point à discretion comme *I*, on fasse comme *AI* est à *AB*, ainsi *AD* à *AL*, & que du point *L* on tire *Lm* parallele & égale à *AI*, & qu'on fasse la même chose sur tout autre point comme *f*, *K*, &c. la Courbe qui passera par toutes les extrémitez des paralleles *eb*, *Lm*, *fg*, *no*, &c. sera l'hyperbole du premier

mier genre, & elle sera rectangle & équilatere lorsque *ABCD* sera un quarré *Fig.* 1. Elle sera obliquangle & scalene lorsque *ABCD* sera un rhombe *Fig.* 2. Et si l'on opere de même sur les deux autres côtez conjoints *BC*, *CD*, on formera les hyperboles opposées. Enfin si dans la *Fig.* 2. au lieu des deux côtez conjoints *AB*, *AD*, qui forment l'angle aigu *BAD* on prend les deux côtez conjoints *AD*, *AC*, qui forment l'angle obtus *ADC*, on formera l'hyperbole obtusangle que j'appelle hyperbole de *suite* à l'hyperbole acutangle *gbCmo*, parceque leurs angles formateurs sont des angles de suite, & se servent de complément l'un à l'autre. Ces hyperboles de suite ont leurs espaces asymptotiques * parfaitement égaux & semblables dans le tout & dans chaque partie.

* Pag. 322. in 4.

C'est une chose connue que le côté *AB* étant pris pour l'unité, si l'on prend sur ce côté prolongé à l'infini *Be*, *ef*, &c. égaux chacun à *AB*, les lignes *AB*, *Ae*, *Af*, &c. représenteront la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. & que les espaces asymptotiques *BCbe*, *BCgf*, &c. représenteront les logarithmes de ces mêmes nombres 2, 3, &c. & comme l'espace *ABCD* n'a rien de curviligne ou d'hyperbolique, il représente aussi le logarithme naturel de l'unité qui est zero; les lignes *AI*, *AK* représenteront toutes les fractions dont *AB* est le dénominateur, & les espaces asymptotiques du côté opposé pris négativement, c'est-à-dire les espaces *DCmL*, *DCon*, &c. représentent les logarithmes de ces fractions.

Il est, ce me semble, de la derniere évidence que toutes les hyperboles sans distinction pouvant servir de modele pour la construction des

logarithmes, on auroit dû choisir préferablement à toutes les autres celle qui est rectangle & équilatere, comme étant certainement la plus simple & la plus reguliere: mais au lieu de suivre la nature & la raison, on s'est assujetti à l'usage arbitraire de la progression décuple, ensorte qu'aiant pris zero pour le logarithme de l'unité, comme on le doit toujours prendre, on a pris arbitrairement 10.00000 &c. pour le logarithme de 10, au lieu que suivant la quadrature de l'hyperbole que je donnai à l'Académie le 14 Juillet 1696, le logarithme naturel de 10 (c'est-à-dire l'espace asymptotique qui répond à 10 fois le côté du quarré générateur de l'hyperbole rectangle & équilatere, ce côté étant 1) est ce que je trouve sans aucune ex-
230258.50929½ + traction de racine par u-
ou 230258.50930½ — ne méthode très simple
& trés-générale.

Il s'agit présentement de trouver quelle espece d'hyperbole sert de modele aux logarithmes ordinaires; il faut pour cela trouver l'aire du quadrilatere générateur *ABCD Fig.* 2.

* Dans l'hyperbole rectangle & équilatere le
*Pag 323. in 4. côté *AB* étant 1, l'aire de son quarré générateur est aussi 1. Or c'est une proprieté commune à toutes les hyperboles qu'il y a toujours même raison entre leurs segmens hyperboliques semblables, & l'aire du quadrilatere générateur. Ainsi le logarithme naturel de 2 est 69314.71805 &c. celui de 10 étant 2.30258.50929.&c. le logarithme arbitraire de 10 étant 1.00000.00000 &c. si l'on fait cette analogie.

Comme 2.30258.50929 &c. est à 69314.71805.&c. ainsi 1.00000.00000 à un quatriéme nombre, on trouvera pour le logarithme ar-

arbitraire de 2 ce nombre 30102. 99956 +, ce qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

Et si l'on fait de même comme 2. 30258. 50929 &c. est à 1. 00000. 00000, ainsi 1. 00000. 00000 &c. à un quatriéme nombre, on trouvera 43429. 44819 pour l'aire du rhombe générateur de l'hyperbole qui sert de modele aux logarithmes ordinaires. Cette aire & le côté 100000 étant donnez, il faut trouver les diagonales du rhombe.

Soit l'une comme *AC* $= x$, l'autre suivant mon Theorême, & le Corollaire ci-dessus sera $\sqrt{4.00000.00000 - xx}$. Or le produit de ces diagonales l'une par l'autre est évidemment double de l'aire du rhombe ou lozange. J'ai donc cette égalité $\sqrt{400000.00000x^2 - x^4} = 86858.89638$, & quarrant tout j'ai $x^4 = 400000.00000xx - 75444.67880.35157.71044$, & par conséquent $x = \sqrt{200000.00000 \pm \sqrt{324555.32119.64842.28955}}$.

La racine de 324555. 32119. 64842. 28955. est 180154. 18985 —, & par conséquent la grande diagonale *AC* est $\sqrt{380154.18985}$ — entre $194975\frac{26836}{38995}$ & $194975\frac{268359}{389951}$. La petite diagonale *BD* sera $\sqrt{19845.24304}$ entre $44548\frac{66713}{89097}$ & $44548\frac{66711}{89096}$; leurs moitiez *Ap*, *Bp* seront 97487 &c. & 22274 &c. Prenant donc *AB* pour sinus total, & ces derniers nombres pour sinus des angles *ABp*, *pAB*, on trouvera que l'angle des asymptotes *BAD* est d'environ $25^d\ 44'\ 25''$, & par conséquent l'angle *ABC* de $154^d\ 15'$* $35''$, qui est aussi l'angle de l'hyperbole ob- *Pag. 574. in 4.

tusangle ou de suite dont les espaces asymptotiques représentent également les logarithmes ordinaires. C'est ce que j'avois avancé sans démonstration dans ma nouvelle Arithmetique pag. 12. ligne 21. On voit par-là que les logarithmes ordinaires ont pour modele deux hyperboles obliquangles, au lieu que les logarithmes naturels ont pour modele la seule hyperbole rectangle & équilatere.

COROLLAIRE II.

Connoissant les deux côtez qui forment un parallelogramme & une des diagonales, on trouvera l'autre en ôtant du double de la somme des quarrez des deux côtez, le quarré de la diagonale donnée; car le reste sera le quarré de la diagonale cherchée.

Soit le côté $AB = 10$, & $AD = 5$, la diagonale $AC = 9$; on demande la diagonale BD.

Le quarré d'AB est 100, celui d'AD est 25, leur somme 125, le double 250, dont j'ôte le quarré de 9 qui est 81 quarré de la diagonale donnée, il reste 169 quarré de la diagonale cherchée, laquelle par conséquent est 13.

Autre Exemple.

Soit $AB = 20$ $\overline{AB}^2 = 400$ $\overline{AC}^2 = 289$

$AD = 15$ $\overline{AD}^2 = 225$

$AC = 17$. Somme $= 625$

on demande $BD = 31$. double $= 1250$

ôtez 289

reste $961 = \overline{BD}^2$.

Donc $BD = 31$.

Use-

Usage.

Soit un corps *A* poussé suivant la ligne *AB* avec une force comme 10, & suivant *AD* avec une force comme 5, & que l'angle *BAD* soit donné de position tel que sa base *BD* soit de 13; on demande, en faisant abstraction de la * résistance du milieu, quelle ligne parcourra le mobile & sa longueur respective. Il est évident qu'il parcourra *AC* de 9.

* Pag. 325. in 4.

REMARQUE I.

C'est en cherchant le rapport de ces lignes que décrit le mobile par un mouvement composé de deux ou plusieurs déterminations que j'ai trouvé mon Theoreme, & il est aisé d'en faire l'application générale.

REMARQUE II.

Cette maniére de déterminer l'angle *BAD*, non pas par degrez, minutes, secondes, &c. mais par le rapport de la base *BD* aux deux côtez *AB*, *AD*, est beaucoup plus simple, plus géométrique & plus analytique. Il est aisé de supposer un angle de tant de degrez, minutes, &c. qu'on voudra; mais ces suppositions ne peuvent s'executer actuellement & exactement. Par éxemple, je puis supposer l'angle *BAD* de 20 degrez; mais je ne puis construire cet angle sans emploier l'une des trois Sections Coniques avec le cercle. Si je le suppose de 31 degrez 17′, il faudra que j'emploie une Courbe d'un genre plus composé que les Sections Coniques; parceque je suis obligé de couper l'angle droit

trois fois en deux continuellement, trois fois en trois, & deux fois en cinq. Or je ne puis le couper avec le cercle & la ligne droite qu'une fois en trois, une fois en cinq, & autant de fois que je voudrai en deux; & pour le couper une seconde fois en trois, il faut emploier une des Sections Coniques; & pour le couper une seconde fois en cinq, il faut une Courbe plus composée. C'est la même chose s'il y avoit des secondes, des tierces, &c. Il faut toujours, lorsque ce rapport est primitif, couper un angle donné en trois & en cinq parties égales une ou plusieurs fois de suite continuellement.

Or dans tous ces cas le rapport de *BD* aux deux côtez *AB*, *AD*, est entierement inexprimable, même en nombres irrationaux. Il est vrai aussi qu'en déterminant ce rapport * de *BD*, on ne peut presque jamais déterminer exactement en nombres la grandeur de l'angle *BAD*: mais aiant à choisir entre connoître exactement le rapport des trois lignes *AB*, *BD*, *DA*, & indéfiniment près la grandeur de l'angle *BAD*, & pouvoir executer le tout géométriquement avec le cercle & la ligne droite, ou bien de supposer seulement le rapport connu de l'angle *BAD* à l'angle droit, & le rapport des deux côtez *AB*, *AD*, sans pouvoir construire actuellement cet angle, ni connoître exactement le rapport de la base *BD*; il me semble qu'on doit sans difficulté préférer la premiére supposition.

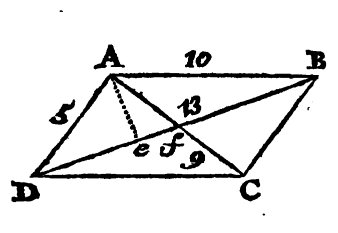
* Pag. 326. in 4.

REMARQUE III.

Si l'on vouloit résoudre ce Probléme par la Trigonometrie, il faudroit faire vingt & une operations, & encore ne trouveroit-on qu'à peu près

près la valeur cherchée, sans pouvoir s'assurer de l'avoir précisément.

Car dans le triangle *ABD*, connoissant les trois côtez $AB = 10$, $AD = 5$ & $BD = 13$ pour trouver l'autre diagonale *AC* du parallelogramme *ABCD*, voici comment il faut operer.



J'abaisse du point *A* sur *BD* la perpendiculaire *Ae*.

1°. J'ajoûte les deux côtez *AB*, *AD*, c'est $10 + 5 = 15$.

2°. J'ôte *AD* de *AB*, c'est, $10 - 5 = 5$.

3°. Je multiplie cette somme par ce reste, 15 par 5, c'est 75.

4°. Je divise ce produit par la base *BD*, c'est $\frac{75}{13} = 5\frac{10}{13}$ pour avoir la différence des segmens *Be*, *De*.

5°. J'ôte cette difference de *BD*, c'est-à-dire, j'ôte $5\frac{10}{13}$ de 13, le reste est $13 - 5\frac{10}{13} = 7\frac{3}{13}$.

6°. Je prends la moitié de ce reste, c'est $3\frac{8}{13}$ pour le segment *De*.

* 7°. Je prends la moitié de *BD* pour *Df*, c'est $6\frac{1}{2}$. *Pag 327. in 4.

8°. J'en ôte *De*, c'est $6\frac{1}{2} - 3\frac{8}{13} = 2\frac{23}{26}$ valeur de *ef*.

 9°. Je

3°. Ajouter ces deux quarrez, c'est 125.
4°. Doubler cette somme, c'est 250.
5°. Quarrer $\overline{BD}^2 = 169$

6°. Oter ce quarré du double	13
	13
de la somme de 250	39
ôtez 169	13
reste 81.	169

7°. Tirer la racine quarrée de ce reste, c'est 9 valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Il y a donc deux fois moins d'operations par ma méthode que par la méthode Géométrique, & trois fois moins que par la méthode Trigonométrique. Celle-ci n'est jamais exacte, & la mienne évite toutes les fractions * où les deux autres engagent; ce qui augmente encore indéfiniment la difficulté de l'operation.

* Pag 329. in 4.

REMARQUE IV.

Ces quatre nombres 5, 10, 9 & 13 ont été choisis avec art comme les plus simples pour exprimer en nombres rationaux les quatre côtez & les deux diagonales d'un parallelogramme obliquangle; de même que les trois nombres 3, 4 & 5 sont les plus simples qu'on puisse trouver pour exprimer les trois côtez d'un triangle rectangle.

Ces quatre autres nombres 20, 15, 17 & 31 ont aussi été trouvez par la même méthode; & dans chaque cas particulier on peut donner non seulement une infinité de solutions, mais une infinité d'infinitez, c'est-à dire, toutes les solutions possibles en entiers & fractions. Ainsi deux côtez étant donnez en nombres, on trouvera une infinité, ou plusieurs infinitez, ou u-

ne infinité d'infinitez de fois deux diagonales commensurables; & au contraire si les diagonales, ou un côté & une diagonale sont donnez, on trouvera le reste.

Les Livres de *Diophante*, de Mrs. *Viete*, *Fermat*, *Frenicle*, &c. & en général de tous les Analystes sont pleins de Problêmes curieux sur les triangles rectangles en nombres. Voici un nouveau champ ouvert sur les parallelogrammes numeriques.

PROBLEME ARITHMETIQUE.

Deux nombres étant donnez en trouver deux autres tels que la somme des quarrez des deux derniers soit double de la somme des quarrez des deux premiers.

LEMME.

Le double de la somme des quarrez de deux nombres est égal à la somme des quarrez de la somme & de la différence de ces deux nombres.

Soit les deux nombres a, & $a+b$.

Leur somme est $2a+b$.

* Leur différence est b. *Pag. 330. in 4.

Le quarré du premier est aa.

Le quarré du second est $aa+2ab+bb$.

La somme est . . . $2aa+2ab+bb$.

Le double de cette somme est $4aa+4ab+2bb$.

Or le quarré de la somme $2a+b$ est $4aa+4ab+bb$.

Et le quarré de la différence b est . . . bb.

La somme de ces deux quarrez est $4aa+4ab+2bb$. comme ci-dessus; donc le double de la somme des quarrez de deux nombres est égal à la somme

mièrement retrancher toutes les suppositions de $b = c$, c'est-à-dire de $b = 1$ & $c = 1$, de $b = 2$ & $c = 2$, de $b = 3$ & $c = 3$, &c. parceque la substitution donne $x = \frac{4abc}{bb + cc} = 2a$, & par conséquent $y = 2a - \frac{bx}{c} = 2a - x = 2a - 2a = o$. Or * quoiqu'il soit vrai en un sens que les quarrez de $2a$ & de o joints ensemble font $4aa$, ce n'est pourtant point satisfaire au véritable sens de la question, ni à l'intention de celui qui la propose, ou qui cherche à la résoudre.

* Pag. 332 in 4.

Secondement il faut retrancher toutes les suppositions où b & c sont en raison réciproque, ou en raison semblable à quelque supposition précédente. Ainsi après avoir supposé $b = 2$ & $c = 3$, il est inutile de supposer $b = 3$ & $c = 2$, parcequ'on retrouveroit la même résolution. Il est aussi fort inutile après avoir supposé $b = 1$ & $c = 2$ de supposer $b = 2$ & $c = 4$, ou $b = 3$ & $c = 6$; & parceque la valeur d'x revient encore la même, avec cette seule différence que $\frac{bx}{c}$ dans le premier cas vient en forme de fraction réduite à moindres termes, & dans les autres cas en forme de fraction équivalente & réductible.

Soient présentement les deux nombres donnez inégaux a & $a + b$, le double de la somme de leurs quarrez est $4aa + 4ab + 2bb$, qu'il faut partager en deux quarrez. Je sçai par le Lemme précédent que les deux côtez qui satisfont sont $2a + b$ somme, & b différence: mais ces deux côtez qui satisfont arithmétiquement ne peuvent satisfaire géométriquement, parce-

ceque la plus grande diagonale doit être plus petite que la ſomme des deux côtez conjoints, c'eſt-à-dire plus petite que $2a+b$. Cependant pour réſoudre ce Problême dans toute ſon étendue, je fais réflexion que des deux nombres cherchez, l'un ſera néceſſairement plus grand que $2a+b$, & l'autre plus petit b; ou, ce qui eſt le véritable cas de la queſtion, l'un plus petit que $2a+b$, & l'autre plus grand que b.

Soit pour abreger $2a+b=c$, & l'un des nombres cherchez $c\pm x$, & l'autre $b\mp\frac{dx}{e}$, la ſomme des quarrez ſera $cc\pm 2cx+xx$ & $bb\mp\frac{2bdx}{e}+\frac{ddxx}{ee}=cc+bb$; donc $x=\frac{\pm 2bde\mp 2cee}{dd+ee}$, & le Problême eſt réſolu.

Dans le premier cas où l'on ſuppoſe l'un des nombres* $c+x$, & l'autre $b-\frac{dx}{e}$, on aura $x=$ * Pag. 333. in 4.
$\frac{2bde-2cee}{dd+ee}$; & afin que la réſolution ſoit poſitive dans ce cas, on peut prendre e à diſcretion, mais il faut que d ſoit plus grand que $\frac{ce}{b}$, & plus petit que $\frac{ce}{b}+\sqrt{ee+\frac{ccee}{bb}}$. Si l'on prend d à diſcretion, il faut que e ſoit plus petit que $\frac{bd}{c}$, & plus grand que $\sqrt{\frac{ddcc}{bb}+dd}-\frac{cd}{b}$.

Dans le ſecond cas où l'on ſuppoſe l'un des nom-

nombres $c - x$ & l'autre $b + \frac{dx}{e}$, on trouve $x = \frac{2eee - 2bd}{dd + ee}$. On peut de même prendre arbitrairement tel nombre qu'on voudra pour d ou pour e, & les restrictions respectives sont reciproques aux précédentes.

C'est ainsi qu'ayant pris pour côtez d'un parallelogramme obliquangles les côtez 1 & 2, j'ai trouvé pour le cas plus simple les diagonales 1⁴ & 2⅗ en entiers les quatre nombres 5, 10, 9 & 13.

EXPERIENCES

Sur les vertus de la racine de la grande Valeriane sauvage.

Par M. MARCHANT.

† IL y a plusieurs années que lisant le Livre intitulé *Phytobasanos* de *Fabius Columna*, Botaniste célebre, je remarquai qu'il assuroit que la racine de la *grande Valeriane sauvage*, mise en poudre, est un excellent specifique contre l'épilepsie; & que non seulement il avoit vû plusieurs épileptiques gueris par l'usage de la poudre de cette racine, mais qu'ayant été lui-même sujet à l'epilepsie, il en avoit été guerie par ce remede.

L'autorité de ce sçavant homme me fit naître l'envie d'experimenter un remede si utile. Je tirai

† 4. Août 1706.

tirai hors de terre,* au mois de Mars, des racines de cette plante, je les préparai de la maniére que *Fabius Columna* le prescrit, & j'en donnai une prise à un garçon de quinze à seize ans, qui depuis l'âge dè sept ans tomboit presque toutes les semaines dans des symptomes épileptiques, perdant connoissance, & écumant de la bouche ; mais ces paroxysmes ne duroient pas plus de sept ou huit minutes. Ce garçon après avoir pris ce remede, fût dix-huit jours sans tomber dans ces accidens ordinaires: mais après ce tems, il retomba deux fois en huit jours, avec cette différence que chaque accès ne dura qu'environ quatre minutes. Je conjecturai que le remede avoit seulement remué quelques humeurs, qui avoient changé & suspendu le cours de la maladie; ce qui me détermina à le purger: & ensuite je lui donnai une seconde prise de la même poudre. Cette premiére purgation n'ayant presque rien évacué; trois jours après il eut un accès d'épilepsie, qui m'obligea de le purger encore une fois; & le troisiéme jour suivant, je lui fis prendre un gros & demi de la même poudre, qui lui procura une sueur considérable, & lui fit vuider par bas plusieurs vers. Quatre jours après, je lui fis encore prendre un gros de cette poudre, qui le fit seulement suer. Depuis ce tems-là, il y a environ six ans, il a joüi d'une santé parfaite.

* Pag. 334. in 4.

Un de mes amis me pria de donner ce remede à une autre personne âgée de vingt ans & quelques mois, qui avoit été attaquée d'épilepsie depuis la quatorziéme année de son âge, & qui depuis ce tems-là tomboit reglément tous les mois dans des accidens dont les paroxysmes étoient si violens, qu'on l'a vû dans son dernier

nier accès se débattre contre terre, & se rouler de bout en bout d'une cour de neuf à dix toises de long, en écumant de la bouche, & perdant tout sentiment pendant plus d'une demi heure. Ayant vû ce malade, qui avoit encore la tête pleine de contusions par sa derniere chute, je crus qu'avant que de rien entreprendre, il étoit à propos de le faire saigner; ce qui fût fait le même jour. Trois jours après je le purgeai; & l'ayant laissé reposer trois autres jours, je lui
* Pag 335. in 4.
* fis prendre deux gros de poudre de la racine de la même plante, qui le lacherent un peu pendant la matinée; sur l'après-midi il sua assez considérablement, & rendit quantité de vers; & les quatre jours suivans, il me parût beaucoup plus gai qu'il n'avoit de coûtume: le cinquiéme jour, je lui fis encore prendre un gros de cette même poudre, qui le fit moins suer que la premiére fois, & lui fit encore jetter quelques vers. Il parût fort abattu par cette derniere prise: mais depuis ce tems-là (il y a environ deux ans) il n'a ressenti aucune attaque d'épilepsie, & il a entierement recouvré sa santé.

J'ai donné avec succès ce remede à plusieurs enfans & à des personnes deja avancées en âge: à quelques-uns il a reculé l'accès; à d'autres il en a diminué la violence ou la durée: ce qui n'est pas peu de chose dans une maladie dont la guerison ou même le soulagement ont toujours paru si douteux: c'est encore un grand avantage que l'on peut tenter à tout âge ce remede, qui, à ce que je sçache, n'a jamais produit de mauvais effets. Une personne de cette Compagnie à qui j'avois indiqué ce remede, peut rendre témoignage qu'il a eu la satisfaction de

de voir qu'un épileptique à qui il l'avoit lui-même donné, en a été non seulement soulagé, mais même parfaitement gueri.

† *Fabius Columna* ordonne que l'on tire hors de terre les racines de cette plante, qui est la *grande Valeriane sauvage* inculte, avant qu'elle commence à montrer ses tiges, c'est-à-dire dans le mois de Mars; qu'après les avoir fait secher on les réduise en poudre, & que l'on donne au malade une demi-cuillerée de cette poudre, c'est-à-dire environ un gros & demi, dans du vin, de l'eau, du lait, ou dans quelqu'autre liqueur convenable, une ou deux fois seulement, suivant la commodité ou l'âge du malade. Pour moi j'ai toujours donné cette poudre, autant que j'ai pu, dans un verre de vin blanc, & j'ai souvent disposé le malade par quelques purgations ou par quelques autres préparations qui dépendent de la prudence & du jugement de ceux qui ordonnent ce remede.

* EXTRAIT

*Pag. 336. in 4.

Des Observations faites au mois de Décembre 1705. *par* M. Bianchini, *sur des feux qui se voient sur une des Montagnes de l'*Apennin.

PAR M. CASSINI le Fils.

‡ EN allant de *Bologne* à *Florence*, on voit ordinairement dans le territoire de *Pietra Mala* des flâmes sur la pente d'une montagne: M. *Bian-*

† *Phytobasanos*, p. 120.
‡ 7. Août 1706.

M. *Bianchini* les aiant vues plusieurs fois de loin, voulut enfin s'en approcher pour les considérer de près. Voici comme il en parle.

Après que j'ai vû naître une flame vive, qui dure sans interruption & sans être nourrie d'aucune autre matiere pour l'entretenir, que de celle que la nature fournit par le moien de la situation des lieux soûterrains, qui se trouvent dans la Montagne de *Pietra Mala*; je ne doute point que l'usage du feu pour nos arts n'ait été communiqué & rendu durable par quelqu'une de ces maniéres vives & de ces sources de flâmes sensibles que j'ai observées dans cette Montagne. Voici la description de ce feu de *Pietra Mala*, auprés duquel je trouvai de la neige & de la glace, qui n'étoient éloignées que de quatre pieds des flâmes qui sortoient du terrein même; sur lequel la neige & la glace, qui n'étoient pas encore fondues, restoient jusqu'à l'heure de midi. J'y allai accompagné de plusieurs étrangers pour bien examiner toutes choses, menant un guide avec nous, qui nous devoit changer de chevaux au sommet de la Montagne de *Pietra Mala*. Nous montames à pied du lieu de cette poste vers le midi par l'espace de deux milles ou environ, laissant à main droite le grand chemin, & descendant de l'autre côté de la Montagne par un sentier étroit, qui se terminoit à une plaine, qui pouvoit être cultivée. Nous vimes dans le milieu de certains

* Pag. 337. in 4. * champs labourez un chemin où il s'élevoit plusieurs petites flâmes, qui paroissoient au dessus de la terre élevées d'environ un demi-pied, comme si elles avoient été nourries & entretenues par du bois & du charbon. Le lieu où naissent ces flâmes est large de huit pieds Ro-

mains,

mains, & long de feize; & il eft auffi facile de le mefurer que les autres endroits de ce champ, parcequ'on peut marcher facilement à l'entour & fur la flâme même, fans craindre de trouver quelqu'ouverture ou caverne, comme fur le Mont *Vefuve*, les parties de ce terrein étant en cet endroit fans aucune divifion, trés-contigues les unes aux autres, avec cette différence cependant que la veine du feu qui fe trouve-là affermit un peu plus les mottes de terre & les pierres qui s'y trouvent, en communiquant aux unes & aux autres une couleur plus brulée que celle qui fe trouve dans les mottes de terre, & les autres pierres qui en font voifines. Je dis la veine du feu, parceque je ne fçais pas appellér autrement cette matiere inconnue, qui produit en vingt endroits différens toutes ces flâmes que l'on voit difperfées de part & d'autre, dans un efpace à peu près de cent-trente pieds en quarré, comme je le vis alors. Je crus qu'il étoit inutile de les compter chacune en particulier, parceque chacun peut faire fortir des flâmes de tout cet efpace, comme il le voudra en deux maniéres, par le moien d'un bâton ou de quelqu'autre chofe dont on frapera legérement le terrein, ou bien en jettant feulement fur ce lieu-là de la paille, du papier, ou quelqu'autre matiere combuftible.

Cependant lorfque ces matieres combuftibles étoient pofées dans un endroit éloigné de ces flâmes, cela n'empêchoit pas qu'elles ne priffent feu, à peu prés de même que quand on jette du papier ou du linge fur du charbon ou du fer allumé, & enfin nous vimes une de ces flâmes vives, laquelle ayant confumé les chofes que l'on y avoit jettées, ne laiffoit pas cependant

de durer & d'être nourrie sans autre matiere que celle que le terrein fournissoit.

Nous jettames sur ces flâmes ardentes des branches * d'épines & autres arbrisseaux, que nous avions ramassées pour cela dans le chemin, & elles brulerent de la même maniére que si on les avoit jettées dans le feu ordinaire. Ensuite remarquant qu'à deux pieds près de la flâme, il y avoit quelques monceaux de neige qui n'étoit pas fondue, & que l'on trouvoit sous la neige éloignée de quatre pieds de la flâme des morceaux de glace; non seulement je me souvins d'appliquer beaucoup mieux à cette merveille ce que dit le Poëte en admirant le Mont Gibel en *Sicile*, avec ses neiges & ses feux: *Scit nivibus servare fidem.* Mais je voulus encore faire l'expérience de jetter sur ces flâmes de la neige & de la glace. Les jetter & les voir se résoudre en eau dans un instant, ce fût la même chose: de même que si on les avoit jettées sur un brasier bien allumé. La flâme n'en fût pas éteinte pour cela, au contraire elle en parût plus vive, & s'étendre avec plus de vitesse & de force sur les pierres voisines & sur celles qui se trouvoient dans son chemin.

* Pag. 338. in 4.

En faisant ces expériences dans tous les environs de ce lieu, nous sentimes une odeur très-agréable, qui nous parût sortir de tout ce terrein allumé, à peu près comme si nous eussions été près d'un feu nourri de quelque bois odoriferant, comme pourroit être le Calambou: & cette odeur se rendoit plus sensible, lorsqu'on se mettoit à l'opposite du Soleil, & au devant de quelque petit vent qui soufflont au visage, & qui augmentoit la flâme. Je pris quelques morceaux de ces pierres qui étoient pro-

proches de la flâme, & une poignée de la poussiere de ce terrein, qui étant frottez l'une contre l'autre faisoient de la flâme, & avoient la même odeur que celle dont nous avons parlé ci-devant. Ces pierres étoient si chaudes au commencement que l'on avoit de la peine à les souffrir dans la main; & en les portant sur nous, elles conserverent pendant un quart-d'heure cette chaleur, & beaucoup plus longtems cette odeur agréable que nous avions senti sur le lieu même. Après avoir fait ces expériences, qui me parurent suffisantes pour contenter nôtre curiosité touchant l'histoire * de la premiére communication du feu, & qui peuvent fournir de matiere suffisante aux Sçavans de philosopher sur la cause d'un effet si merveilleux de la nature, nous reprimes nôtre droit chemin vers *Fiorenzole*.

* Pag. 339. in 4.

Réflexions sur les Observations de M. Bianchini.

Ce feu observé en *Toscane* par M. *Bianchini*, a un grand raport à celui qui a été observé en *Dauphiné* par M. *Dieulamant*, & dont il est parlé dans l'Histoire de l'Académie de l'an 1699 page 26 †. Le terrein que ce feu occupe est de 6 pieds de long sur 4 de large. Il consiste dans une flâme legere errante telle qu'une flâme d'eau de vie.

On ne voit point de matiere qui puisse servir d'aliment à la flâme, on s'apperçoit seulement qu'elle sent beaucoup le souffre. On assure que ce feu est plus ardent en hyver & dans un tems humide, qu'il diminue peu à peu dans les grandes chaleurs.

Ces deux feux ont cela de commun qu'ils sont

† Sec. Edit. pag. 28.

sont sur le penchant d'une Montagne, & paroissent sortir tous deux de la terre, sans qu'il y ait aucune fente qui puisse avoir communication avec quelque caverne inferieure.

Ils augmentent aussi tous les deux par l'humidité & par le froid, comme il a été remarqué dans le feu du *Dauphiné*, ce qui se rapporte à l'effet de la neige, qui jettée sur la flâme de *Pietra Mala*, la fait augmenter pendant qu'elle se fond en eau.

La différence consiste dans l'odeur, qui dans le feu du *Dauphiné* est de souffre; au lieu que celle qui exhale du terrein de *Pietra Mala* est comme aromatique.

*Pag. 340. in 4.

* TRAITE DES ROULETTES,

Où l'on démontre la maniére universelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, & de réflexion ou de rebroussement, leurs superficies & leurs longueurs, par la Géometrie ordinaire.

Avec une méthode générale de réduire toutes les Lignes courbes aux Roulettes, en déterminant leur génératrice ou leur base, l'une des deux étant donnée à volonté.

Par M. DE LA HIRE.

DEFINITIONS.

† J'APPELLE une *Roulette* la ligne qui est décrite par un point d'une superficie plane, qui

† 11. Août 1706.

qui eſt toujours appliquée ſur une autre ſuperficie plane, pendant qu'une ligne droite ou courbe telle qu'elle puiſſe être, que j'appelle la *Génératrice* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur la même ſuperficie où eſt le point, roule ſur une ligne droite ou courbe qui ſera la *Baſe* de la Roulette, & qui eſt poſée ſur l'autre ſuperficie.

Il eſt évident par cette deſcription ou génération de la roulette, que ſa baſe ſera toujours égale à la ligne droite ou courbe qui en eſt la génératrice, ou à toute cette Courbe ou à ſa partie, ce qui ſuit du roulement de la génératrice ſur la baſe conſiderée comme immobile.

Je n'entends pas que cette baſe ſoit terminée par la rencontre de la roulette, mais qu'elle eſt terminée par deux points tels qu'on voudra de la droite ou de la Courbe génératrice, dans leſquels elle touche la baſe au commencement & à la fin de la deſcription de la roulette, ou de quelqu'une de ſes parties; car on peut n'en conſidérer* qu'une partie, & de plus il faut remarquer qu'il y a des Roulettes qui ſont infinies; ce qui dépend de la Courbe génératrice ou de la nature de la baſe.

* Pag. 341. in 4.

Il n'y a point de Courbe qu'on ne puiſſe conſidérer comme une roulette, laquelle ſera formée par une ligne droite ou courbe qui lui ſervira de génératrice.

Tous les Géométres ſçavent déja que toute ligne courbe propoſée peut-être décrite par l'évolution d'une ligne courbe, & la ligne courbe propoſée aura pour ſa génératrice une ligne droite, laquelle roulera ſur la Courbe qui la décrit par ſon évolution, & qui lui ſert de baſe, & le point décrivant ſera un des points de la génératrice prolongée ou non prolongée.

Mais je dis encore, 1°. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit droite ou courbe pour une roulette, & qu'on donne aussi de position une ligne droite ou courbe pour servir de base à cette roulette, & on pourra déterminer la génératrice de la roulette proposée.

2°. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit pour une roulette, & qu'on donne quelque ligne droite ou courbe pour sa génératrice, & dans quelle position on voudra, où un point du plan de la génératrice est donné de position par rapport à la génératrice, & ce point étant sur la Roulette dans cette position de la génératrice, on pourra déterminer la base & sa position.

Mais avant que d'entrer dans la solution de ces Problêmes, je démontrerai plusieurs proprietez particulieres des Roulettes en général, tant de leurs touchantes que de leurs points de recourbement & de réflexion, avec des méthodes pour connoitre les longueurs & les superficies de ces Courbes sans me servir de calcul; ce que j'avois déja expliqué en partie dans un Mémoire que je lûs à l'Académie au mois de Juin 1698, & qui n'a point été imprimé.

Le point qu'on appelle *Flexus contrarius*, de *Recourbement* ou d'*Inflexion*, est celui où une ligne courbe se tourne en deux sens contraires; & le point de *Réflexion* ou de *Rebroussement* * est celui où elle paroit comme se reflechir & retourner vers le même côté où elle étoit.

* Pag. 342. in 4.

D E-

DETERMINATION

Des Touchantes des Roulettes, & de leurs points de Recourbement & de Réflexion.

† I. Si dans quelque position que soit la ligne génératrice *EAB* d'une roulette sur sa base *AT* qu'elle touche au point *A*, on mene une ligne droite *AP* du point touchant *A* au point décrivant *P*, la perpendiculaire *PF* à cette ligne *AP* par le point *P*, sera touchante de la roulette dans ce même point *P*.

II. Si du point *A* on mene la ligne *AC* qui touche en *C* la ligne *NC*, laquelle décrit par son évolution la génératrice *EAB*; & de même si du point *A* on mene la ligne *AO* qui touche en *O* la ligne *MO* qui décrit aussi par son évolution la base *TA*, & comme *CA* & *OA* sont toutes deux perpendiculaires à la génératrice & à la base qui se touchent en *A*, elles ne feront qu'une même ligne droite *CAO* par le Lemme suivant; c'est-pourquoi si l'on fait comme *CO* à *CA*, ainsi *AO*, à *AV*, & que sur *AV* comme diamétre on décrive le cercle *AXV*, on connoitra par son moien de quel côté la convexité de la roulette *SPR* doit être tournée à l'égard de sa touchante *PF* & du point *A*. Car si le point *P* qui décrit la roulette est au dedans du cercle *AXV*, la convexité de la roulette au point *P* sera tournée vers le point *A*, & la roulette sera au-dessus de sa touchante *PF* par rapport au point *A* comme dans cette Figure. Au contraire si le point *P* décrivant est hors le cercle *AXV* dans cette même position

† Fig. I.

de la génératrice & de la base, la concavité de la roulette sera tournée vers *A*, & sa touchante *PF* sera au-dessus par rapport au point *A*. Enfin si le point décrivant se trouve sur le cercle, le point *P* décrivant sera dans le recourbement de cette roulette.

III. Si sur ce cercle *AXV* on prend quel point on voudra * pour le point décrivant d'une roulette dont la génératrice soit dans la position *EAB* touchant la base *AO* au point *A*; je dis que ce point sera celui du recourbement de la roulette décrite par ce point. Ainsi ce cercle sera le lieu du recourbement de toutes les roulettes décrites sur cette base, & par cette génératrice quand elle touche sa base au point *A*, les roulettes étant décrites par les points de ce cercle.

*Pag. 343. in 4.

Mais il faut remarquer que dans les mouvemens de la même génératrice sur la même base posée immobile, le cercle comme *AXV* change de grandeur & de position; ce qui est évident par sa description, ce qui fait qu'une infinité de points du plan de la génératrice peuvent être les points de recourbement de roulettes décrites par ces points.

Il s'ensuit donc aussi que les touchantes des roulettes dans tous les points de recourbement, pour une même position du cercle *AXV*, passeront toutes par l'extrémité *V* de son diamétre *AV*, puisque ces touchantes feront toujours des angles droits avec celles qui seront menées du point de contact *A* de la base & de la génératrice, aux points de la circonférence du cercle.

IV. La figure génératrice étant donnée, & le point décrivant étant aussi donné de position sur

le

le plan de cette figure, on peut déterminer le point sur la figure génératrice lequel touchant la base, le point décrivant sera dans le recourbement de la roulette. Et l'on peut aussi déterminer l'espace sur le plan de la génératrice, dans lequel aiant pris quel point on voudra pour le point décrivant, la roulette aura un recourbement, & le point décrivant étant pris hors cet espace, la roulette n'aura point de recourbement.

V. On déterminera aussi le point de réflexion de la roulette si elle peut en avoir un, par rapport à la longueur de la génératrice & à la position du point décrivant, lequel sera toujours celui où se trouve le point décrivant lorsque la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant * à la génératrice, sera perpendiculaire sur la base, ou bien, ce qui est la même chose, lorsque le point de rencontre de la plus petite ligne menée du point décrivant à la génératrice & de la génératrice, sera sur la base.

* Pag. 344. in 4.

Démonstration des Touchantes.

Soient deux points † *A* & *E* sur la base *BAG* d'une roulette lesquels soient indéfiniment proche l'un de l'autre, & deux perpendiculaires *AO*, *EO*, à la base en *A* & en *E* qui se rencontrent en *O*. Soient aussi deux points *A* & *B* sur la génératrice autant éloignez l'un de l'autre que les points *AE* sur la base, & soient encore les perpendiculaires *CA*, *CB* sur la génératrice lesquelles se rencontrent en *C*. Soit enfin le point *P* qui décrit la roulette quand la génératrice roule sur la base.

† Fig. II.

Lorsque les lignes *OA*, *CA* seront jointes ensemble, le point décrivant *P* sera la roulette; & lorsque les lignes *OE*, *CB* seront aussi jointes ensemble directement en *OE*♋, & le point *B* de la génératrice sur le point *E*, de la base, le point *P* décrivant étant parvenu en *S*, aussi le point *S* sera la roulette.

Mais aiant mené les cordes *AE*, *AB* qui sont égales entr'elles par la supposition, & qu'on peut regarder comme les arcs puisqu'on les a pris indéfiniment petits & égaux entr'eux; je considére le mouvement du point *P* de la roulette à son point *S*, qui est aussi celui de la ligne *BC* en *E*♋, comme étant composé de deux mouvemens, dont le premier sera lorsque la corde *AB* est jointe à la corde *AE*, dans lequel mouvement la ligne *AC* se sera mûe en *AM*, & par conséquent le point *C* sera passé en *M* & la ligne *BC* en *EM*; donc l'angle *CAM* sera égal à l'angle *BAE*. Mais aussi par le même mouvement le point *P* sera venu en *Z*, & l'angle *PAZ* sera aussi égal à l'angle *BAE* & à l'angle *CAM*.

Le second mouvement est celui qui fait la ligne *EM* pour venir en *E*♋ où elle est jointe directement à la ligne *OE*; & par ce mouvement le point *Z* se sera mû pour venir* en *S*, la ligne *EZ* étant mûe en *ES*, en faisant l'angle *ZES* égal à l'angle *ME*♋. D'où il suit que les deux angles ensemble *PAZ*, *ZES* sont égaux au seul angle *CB*♋; car on régarde les points *B* & *E* comme un seul point.

* Pag. 345. in 4.

Mais par la construction, puisque les lignes *AB*, *AE* sont égales entr'elles & indéfiniment petites, les angles *CBA*, *CAB* seront égaux, de même que les angles *OEA*, *OAE*; & par con-

conséquent l'angle *MAC* sera égal à l'angle *ME*♋ & égal à *BAE*. Donc aussi leurs égaux *PAZ*, *ZES* seront égaux entr'eux & à l'angle *BAE*. Et ce sera toujours de même quelque disposition que les lignes *AΘ*, *EΘ*, & *AC*, *BC* aient entr'elles, soit qu'elles concourent comme dans cette Figure les unes au-dessus, & les autres au dessous des cordes ou de la base de la roulette, soit qu'elles concourent d'un même côté, & soit enfin qu'il y en ait de paralleles entr'elles, ce qui ne sera que des cas particuliers de cette démonstration générale.

Maintenant il est facile à voir que puisque les deux angles *PAZ*, *ZES* sont égaux entr'eux, & ensemble égaux au seul angle *CE*♋, si l'angle *AZE* ou son égal l'angle *APB*, car le triangle *APB* dans le mouvement s'est placé en *AZE*, est égal à l'angle *CE*♋, les lignes *AP*, *ES* seront paralleles entr'elles ; & par conséquent si par le point *P* on mene la ligne *PF* perpendiculaire à *PA*; le point *S* sera dans la ligne *PF*. Mais si l'angle *AZE* est plus petit que *CE*♋, le point *S* se trouvera au-dessous de *PE*; au contraire s'il est plus grand il sera au-dessus.

On voit par-là que la position des points de la roulette comme *S*, par rapport au point *P* sur la ligne *PF* laquelle est perpendiculaire à *AP*, dépend de la grandeur de l'angle *APB* par rapport à l'angle *CB*♋, ou bien des deux angles *OCB*, *COE* qui sont ensemble égaux à l'angle *CB*♋ ou *CE*♋, puisque les points *B* & *E* ne sont considerez que comme un seul point, & que l'angle *CE*♋ est l'exterieur du triangle *COE*.

Maintenant si l'on mene la ligne *PD*, qui

* Pag. 346. in 4. faisant avec * *AP* l'angle *APD* égal à l'angle *APB*, rencontre la génératrice en *D*, & qu'on prenne sur la base l'arc *AG* égal en longueur à l'arc *AD*, & qu'on mene *OGH* perpendiculaire à la base en *G*, & *DC* perpendiculaire à la génératrice en *D*, les points *D* & *G* n'étant considerez que comme un seul point, on fera la même démonstration que ci-devant, ensorte que si l'angle *CGH* est égal à l'angle *DPA* & égal à l'angle *APB* son égal par la construction, l'angle *CEQ* étant aussi égal à l'angle *APB*, il est évident que le point *R* de la roulette qui sera déterminé comme le point *S*, sera aussi sur la ligne *FPF*; & par conséquent la ligne *PF* touchera la roulette en *P*; car en général si une ligne droite rencontre une Courbe en deux points qui soient indéfiniment proche l'un de l'autre, la droite touchera la Courbe dans ces points considerez comme un seul point: mais si l'angle *CGH* est plus petit que *DPA*, lorsque l'angle *CEQ* est aussi plus petit que l'angle *APB*, le point *R* sera au-dessous de *FPF* comme le point *S*; & par conséquent la ligne *FPF* touche la roulette en *P* qui en est un point. Et si l'angle *CGH* est plus grand que l'angle *DPA*, & que l'angle *CEQ* soit aussi plus grand que l'angle *APB* égal à *DPA*, le point *R* de la roulette sera au-dessus de la ligne *FPF* comme le point *S*, & *FPF* touchera la roulette en *P*.

Mais s'il arrivoit que l'angle *CEQ* étant égal à l'angle *APB* le point *S* étant sur *PF*, & que l'angle *CDH* fût ou plus grand ou plus petit que l'angle *DPA*, le point *R* étant alors au-dessus ou au-dessous de *PF*, ce qui peut arriver par la disposition des perpendiculaires *CD*,

OG,

OG, alors la ligne FPF ne laisseroit pas d'être touchante de la roulette, mais le point P en seroit le recourbement, puisque dans les points de la roulette entre P & R ou P & S, il ne pourroit arriver que ce qu'on vient de démontrer, où une ligne comme FPF toucheroit la roulette dans son point P; car les autres points d'un côté & d'autre de P à une distance indéfiniment petite demeureroient au-dessus d'un côté & au-dessous de l'autre de la ligne FPF, le * recourbement n'étant que dans un point, à moins que toute la roulette ne fût une ligne droite, auquel cas tous ces points seroient des recourbemens.

* Pag. 347. in 4.

Il s'ensuit donc de ceci que si l'angle CEQ est égal à l'angle APB, & le point S qui doit être indéfiniment proche de P étant sur la ligne PF, ce point P sera le recourbement de la roulette qu'il décrit.

Ce que je viens d'expliquer touchant la position de la roulette par rapport au point A, ne doit s'entendre que lorsque les points C & O qui sont les rencontres des perpendiculaires à la génératrice & à la base, sont des deux côtez du point A; mais s'ils sont tous deux du même côté, ce sera tout le contraire, ce qui ne change rien à la démonstration.

Démonstration du point de recourbement.

† Il sera maintenant facile de déterminer la position du point P quand il est dans le recourbement de la roulette, si elle peut en avoir un, ce qui paroît dans la solution de ce Problême. Car le point C étant le concours de deux perpen-

† FIG. III.

pendiculaires en *A* & en *E* indéfiniment proche l'une de l'autre sur la génératrice ; ou bien, ce qui est la même chose, le point *C* étant le point touchant de la ligne menée du point *A* à la ligne qui décrit par son évolution la génératrice, si sur le diamétre *AC* on décrit un demi-cercle *CXA*, quand le point *P* décrivant sera dans la circonférence de ce cercle, il sera aussi dans le recourbement de la roulette qu'il d'écrit, pourvû que la base soit une ligne droite : car alors l'angle *CEQ* qui sera égal à l'angle *ACE*, sera aussi égal à l'angle *APE*, puisque le point *P* est dans la circonférence du cercle *APC*, & que le point *E* peut être consideré comme étant sur la génératrice, sur la base de la roulette & sur le cercle *CA*, à cause que *AE* est une partie indéfinement petite, & que le cercle touche la base qui est une ligne droite dans le point *A*, laquelle touche aussi la génératrice dans ce même point *A*.

* Pag. 348. in 4. *Il faut remarquer que la position & la grandeur du cercle *AXC* ou *AXV* change dans toutes les différentes positions de *CQ*, & que dans chaque position il fera connoitre seulement si le point *P* décrivant est dans le recourbement de la roulette, & si la roulette a sa convexité ou sa concàvité tournée vers *A* : mais il sera le lieu du point de recourbement de toutes les roulettes formées sur la même base & sur la même génératrice dans la position où elles se touchent en *A*, quand les points décrivans y seront placez. Ce n'est pas que d'autres points décrivans ne puissent donner des roulettes qui auront des recourbemens, mais ce sera hors cette position, comme je l'explique plus au long dans le cas suivant.

Mais

Mais si la base est une † Courbe, & que le point O soit le point touchant de la ligne droite CAO sur la Courbe qui décrit par son évolution celle de la base; aiant fait comme CO à CA, ainsi AO à AV, & sur AV pour diamétre aiant décrit le cercle AXV, je dis que ce cercle est le lieu du recourbement de la roulette lorsque son point décrivant P se trouvera sur la circonférence de ce cercle dans cette position de la génératrice & de la base; & quand le point P sera hors ce cercle, la concavité de la roulette sera tournée vers A; au contraire sa convexité sera tournée vers A quand le point P sera dans le cercle.

La démonstration en est facile après ce que j'ai démontré; car dans les triangles dont deux des angles sont indéfiniment petits, & par consequent le troisiéme indéfiniment grand, on peut considérer que les angles sont entr'eux comme les côtez opposez à ces angles: c'est pourquoi au triangle CEO le côté CO est au côté CE ou CA, car on les suppose égaux, comme l'angle CEO ou son supplément CEQ à l'angle COE. Mais aussi au triangle VOE le côté OE est à EV, ou bien les lignes AO à AV qui leur sont supposées égales, comme l'angle OVE à l'angle VOE. Mais à cause que CO est à CA comme AO à AV, l'angle CEQ sera à l'angle COE comme l'angle OVE à l'angle VOE ou COE; donc l'angle CEQ sera égal à l'angle OVE ou AVE, * qui sera égal à APE à cause de la circonférence du cercle AXV; & par ce qui a été démontré d'abord les points S ou R de la roulette & qui sont indéfiniment proche de P, seront sur la ligne PF perpendiculaire à AP, & par conséquent la roulette se-

* Pag. 349. in 4.

† FIG. IV.

sera dans son recourbement en P; car si la roulette étoit décrite, & qu'elle coupat le cercle AXV dans quelque point comme P, & que ce point fût alors sur le cercle & dans la position où il décrit la roulette lorsque la base & la génératrice se touchent en A sur CO, il s'ensuivroit que le point P de la roulette seroit dans son recourbement: mais si dans cette position de la base & de la génératrice, le point décrivant P se trouvoit au dedans du cercle AXV, l'angle APE seroit obtus, & par ce qui a été démontré d'abord des touchantes, la convexité de la roulette seroit alors tournée vers A, & ce seroit le contraire si le point décrivant étoit hors le cercle, car ce seroit la concavité de la roulette qui seroit tournée vers A.

On remarquera aussi qu'on peut placer le cercle AXV, dont on a déterminé le diamétre AV, de l'autre côté de A, & ce sera la même démonstration, ce diamétre étant toujours sur CO.

† On fera la même démonstration pour la roulette dont la courbure de la base aura sa convexité tournée du même côté de celle de la génératrice; car on fera aussi comme CO à CA, ainsi AO à AV, & AV sera le diamétre du cercle, qui est le lieu du point décrivant, quand ce point est sur le recourbement de la roulette; & l'on aura dans le triangle COE le côté CO au côté CE ou CA, comme l'angle CEO à l'angle COE. Mais au triangle VOE le côté OE est à EV, ou bien AO à AV, comme l'angle OVE à l'angle VOE, ou son supplément AOE qui est le même que COE. C'est pourquoi l'angle CEO est à l'angle COE, comme l'angle OVE ou AVE à l'angle COE, & par

† Fig. V.

par conséquent l'angle *CEO* sera égal à l'angle *AVE* ou à l'angle *APE*, & dans la formation de la roulette quand le point *E* de la génératrice sera placé sur le point *e* de la base, & que le * point *P* décrivant sera avancé d'un pas, quoiqu'indéfiniment petit, la ligne *CE* sera placée sur *OE*. *Et c'est ce qu'il falloit démontrer*. * Pag. 350. in 4.

Les différentes positions des points *O* & *C* à l'égard du point *A* ne changent rien à cette démonstration, & l'on peut seulement remarquer que si le point *O* ou le point *C* sont à distance infinie, le point *V* ne laissera pas d'être déterminé; comme si le point *O* est à distance infinie, ce qui fait la base en ligne droite au moins dans le point *A*; car le point *O* à distance infinie pourroit ne convenir qu'à un point de la base qui seroit celui de son recourbement, & alors par la regle, *CO* infinie étant à *CA*, comme *AO* infinie à *AV*, ou bien *CO* à *AO* qui sont deux infinies, lesquelles ne différent que d'une finie *CA* pouvant être reputées comme égales, doivent aussi donner *CA* & *AV* égales; c'est-pourquoi le point *V* tomberoit au point *C*, ce qui revient à ce que j'ai dit de la roulette qui a pour base une ligne droite. De même si le point *C* est à distance infinie, *CO* infinie est à *CA* infinie reputées comme égales entr'elles, comme *AO* à *AV* qui doivent aussi être égales.

† Il y a plusieurs cas remarquables dans ces sortes de roulettes; mais je ne m'y arrêterai pas à cause que ce ne sont que des déterminations particulieres, si ce n'est à celui-ci, où la base & la génératrice sont deux cercles dont les conve-

† Fig. VI.

vexitez sont tournées du même côté, & dont le diamétre de la base est double de celui de la génératrice; car alors par la regle le point *V* tombera au point *O* qui est le centre de la base, & par conséquent le cercle qui est le lieu du recourbement de la roulette sera le même que le générateur; de sorte que si le point décrivant est sur le cercle générateur, toute la roulette sera un recourbement, c'est-à-dire, que ce sera une ligne droite: car dans toutes les différentes positions du cercle générateur le point décrivant *P* sera toujours sur le même cercle *AVX*.

Mais si le point décrivant est au dedans ou au dehors* du cercle générateur, il est évident que la roulette ne peut avoir de recourbement; car ce point ne pourra jamais se trouver sur le cercle générateur qui est le même que *AVX* dans toutes ses différentes positions, & alors si le point *P* est au dehors du cercle générateur, la Courbe de la roulette aura sa concavité tournée vers le point *A* suivant la regle, & s'il est au dedans ce sera sa convexité qui sera tournée vers ce même point *A*.

*Pag. 351. in 4.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette espece de roulette, c'est que ce sera toujours une ligne elliptique, hormis quand le point décrivant est au centre *C* du cercle générateur; car ce sera un cercle, & une ligne droite quand il est sur la circonférence comme j'ai déja dit. Voici comme je démontre que ces roulettes sont des Ellipses.

† Soit la base *BAEF*, le cercle générateur *OXA* & le point décrivant *P* sur son diamétre *OCA*. Aiant fait *AH* égale à *OP*, du point *O* pour centre & pour rayons *OP*, *OC*, *OH* soient

† FIG. VII.

soient décrits les cercles *PI*, *CM*, *HNT*, & le cercle générateur étant transporté en *OZE* & le point décrivant *P* en *R* ; je dis que le point *R* est sur la circonférence d'une Ellipse dont *OP* est la moitié du petit axe, & *OT* égale à *OH* est la moitié du grand axe.

Lorsque le cercle générateur est parvenu en quelle position on voudra, comme en *OZE* en roulant sur la base *AE*, son diamétre étant placé en *OE*, il est évident que le point *O* sera parvenu au point *L*, ensorte que l'arc *OL* sera double de l'arc *AE*; car le cercle de la base a son diamétre double de celui du générateur. Mais aussi l'arc *CM* qui est égal à l'arc *AE*, sera la moitié de l'arc *OL*, & la corde *OL* sera double du sinus *MD* de l'angle *COM*, qui est la moitié de l'angle *OML*. De plus la ligne *MG* parallele à *OC* fera l'angle *OMG* égal à *MOC*, & par conséquent *MG* sera perpendiculaire sur *OL* & la coupera en deux également en *G*, & le point *L* sera sur *OT* perpendiculaire à *OA*. Mais puisque le point *O* de la circonférence du cercle a été transporté en *L*, le diamétre *OCA* * sera transporté en *LM*, & le point *P* décrivant sera par conséquent sur *LM* en *R*, *LR* étant égale à *OP* ou à *OI*: c'est-pourquoi *IR* sera parallele à *OL*. Enfin si l'on mene *RN*, le triangle *MRN* sera isocele ; car les lignes *MR*, *MI*, *CP*, *CH*, *MN* sont égales: c'est-pourquoi les points *IRN* seront dans la circonférence d'un cercle dont *IN* est le diamétre, & par conséquent l'angle *IRN* sera droit. Mais *IR* est perpendiculaire à *OA*, donc *RN* sera parallele à la même *OA*. Il est donc évident par la génération des Ellipses que le point *R* sera sur l'Ellipse *BRT* qui a pour ses demi-axes

* Pag. 352. in 4.

DH feront les diamétres des cercles *VA*, *BI*, *DH* qui font le lieu qu'on cherche. Mais auſſi il eſt facile à voir que tous les diamétres de ces cercles feront toujours plus petits que *OA*, puiſque le ſecond* terme de la propoſition eſt toujours plus petit que le premier lorſque la baſe a ſa convexité tournée vers celle de la parabole, & par conſéquent le troiſiéme terme qui eſt toujours égal à *AO* dans cet exemple ſera plus grand que le quatriéme.

* Pag. 354. in 4.

On déterminera donc par le moien de ces cercles l'eſpace où le point décrivant *P* doit être ſur le plan de la parabole pour faire que la roulette ait un recourbement. Cet eſpace ſera renfermé entre la parabole & la Courbe qui touchera tous les cercles *AV*, *BI*, *DH*, qui feront décrits d'un côté & d'autre de l'axe de la parabole. Il eſt donc évident que ſi le point décrivant *P* eſt dans cet eſpace, il rencontrera un de ces cercles dont l'extrémité du diamétre ſur la parabole en déterminera le point où elle doit être placée ſur la baſe pour faire que ce point décrivant ſoit ſur le recourbement. Mais ſi le point décrivant eſt hors cet eſpace, la roulette n'aura point de recourbement, ce qui ſuit des démonſtrations précédentes.

Mais ſi le point décrivant *P* eſt donné de poſition avec un point comme *B* ſur la parabole, & qu'on demande le diamétre de la baſe circulaire pour faire enſorte que lorſque le point *B* la touchera, le point *P* ſoit dans le recourbement de la roulette; il n'y aura qu'à ſe ſervir de la converſe de la propoſition générale, & mener la ligne droite *PB*, & par le point *P* la ligne *PQ* perpendiculaire à *BP*, laquelle rencontrera au point *Q* la ligne *BK* perpendicu-

culaire à la parabole en *B*, ensorte que si l'on fait ensuite comme *KQ* à *KB*, ainsi *KB* à une quatriéme *KR*, le point *R* sera le centre du cercle de la base, lequel aura pour rayon *RB*. La grandeur *KR* peut-être prise indifférem-ment d'un côté & d'autre de *K* sur *KB*, pour y déterminer le centre *R* du cercle de la base qui aura son rayon *KB*; & il est évident qu'il y aura plusieurs cas particuliers qui naîtront des différentes grandeurs données. Et si le point *Q* tomboit au point *K*, le cercle de la base auroit son centre à distance infinie, & ce ne seroit qu'une ligne droite.

* La démonstration de la construction de ce problême se tire de la regle que j'ai donnée: car si le point *R* est le centre de la base, on aura par la regle *KR* à *KB*, comme *BR* à *BQ*; mais en divisant *KR* sera à *BR* moins *KR*, ce qui est égal à *KB*, comme *KB* à *BQ* moins *KB*, ce qui est égal à *KQ*; ce qui est la même proportion que je viens de donner pour trouver le point *R*. * Pag. 355. in 4.

Ces démonstrations conviennent aussi à toutes les lignes qui sont décrites par l'évolution d'une autre, selon la methode de M. *Huygens* dans son *Traité des Pendules*, puisque toutes ces sortes de lignes ne sont que des roulettes qui ont pour base la ligne courbe qu'il appelle évolue, & pour génératrice le cercle infini ou la ligne droite, ce qui est la même chose.

Pour les points de réflexion des roulettes, ils seront déterminez par la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant sur la génératrice, lorsque le point de rencontre de cette ligne avec sa génératrice sera sur la base; alors le point décrivant sera dans le point de ré-

flexion de la roulette: ce qui paroit par la seule inspection de la figure, & par la formation de la roulette.

Détermination de la superficie & de la longueur des Roulettes.

On peut par la méthode que j'ai donnée cidevant déterminer la superficie des roulettes, & la longueur de leurs Courbes. Car si les lignes menées du point décrivant jusqu'aux points de la Courbe génératrice, gardent entr'elles quelque progression connue, les divisions de la génératrice ausquelles ces lignes sont menées en aiant aussi une; & de plus les angles que font les touchantes des lignes qui décrivent par leur évolution la génératrice & la base, étant aussi connus par rapport aux parties de ces lignes, on connoîtra la superficie & la longueur des roulettes par rapport à quelque superficie & à quelque ligne de celles qui sont données dans la génératrice & dans la base.

* Pag. 356. in 4. * On verra dans les exemples suivans des applications de cette méthode, qui serviront pour toutes les roulettes.

Exemple I.

Soit le † cercle *ABD* dont le centre est *C* pour la Courbe génératrice de la roulette *DPV*; & le cercle *AEV* dont le centre est *O* pour la base. Les centres *C* & *O* de ces cercles représentent les lignes dont les deux cercles sont évolus: c'est-pourquoi dans toutes les positions de ces deux cercles les lignes qui passeront par ces deux

† FIG. IX.

deux centres, seront perpendiculaires à la génératrice & à la base.

Maintenant dans telle position qu'on voudra du cercle générateur *AEPD* sur la base *AAV* laquelle il touche en *A*, le point décrivant *P* étant placé sur la roulette en *P*, si la génératrice a roulé sur la base d'une partie indéfiniment petite *AE*, la ligne *CO* qui joint les centres ou qui touche les Courbes qui décrivent par leur évolution la génératrice & la base, aura passé en *OEQ*, & le point décrivant *P* sera parvenu au point *S*.

Aiant mené comme on a fait pour les touchantes les lignes *AP*, *EP*, *ES*, il s'ensuit que la ligne *EP* sera parvenue en *ES*, & que l'angle *PES* sera égal à l'angle *CEQ*. Ainsi dans ce petit roulement il se sera formé la figure *PAES*, qui sera la portion de la superficie de la roulette qui convient à ce roulement *AE*.

Mais cette superficie est composée de deux triangles *APE*, *PES*, & le triangle *APE* a son angle en *P* égal à la moitié de l'angle *ACE* ou à l'angle *ADE* à cause du cercle. C'est-pourquoi si l'on divise en deux également l'angle *ACE* par la ligne *CR* laquelle sera parallele à *DE*, on aura le triangle *RCE* qui aura son angle *RCE* égal à l'angle *APE* à cause du cercle, & son angle exterieur *CEQ* égal à l'angle *PES*. Mais comme dans les triangles qui ont leurs angles indéfiniment petits ou grands, on raisonne des côtez comme des angles; il s'ensuit que *ER* | *CR* || l'angle *RCE* ou *APE* | l'angle *CER* ou *CEQ* ou *PES*.

Mais aussi les deux triangles qui ont un angle indéfiniment * petit *PAE*, *PES*, & qui ont le cô- * Pag. 55. in 4.

côté commun *PE* & les autres sensiblement égaux, sont entr'eux comme leurs angles *APE*, *PES*; on aura donc le triangle *APE* | triangle *PES* || *ER* | *CR*.

Mais dans le triangle *OCE* dont les angles en *C* & en *O* sont indéfiniment petits, & dont l'angle *C* est divisé en deux également par la ligne *CR*, & *CD* étant égale à *CA* ou *CE*, on a *OD* | *OC* || *DE* ou *DA* ou 2*CA* | *CR*. Semblablement on a *OD* | *DC* || *OE* ou *OA* | *ER*.

C'est-pourquoi *OD* × *CR* sera égal à *OC* × 2*CA*.

Et de même *OD* × *ER* sera égal à *DC* ou *CA* × *OA*.

Et comparant les quantitez égales de l'un à l'autre, & à cause des côtez *OD* égaux, on a *CR* | *ER* || *OC* × 2*CA* | *CA* × *OA*, ou bien || *OC* × 2*CA* | 2*CA* × $\frac{1}{2}$*OA*.

Donc aussi à cause du côté égal 2*CA*, on a *CR* | *ER* || *OC* | $\frac{1}{2}$*OA*, ou bien *invertendo* *ER* | *CR* || $\frac{1}{2}$*OA* | *OC*; ou doublant || *OA* | 2*OC* égal 2*OA* plus 2*CA*.

Donc enfin *OA* | 2*OA* plus 2*CA* || triangle *APE* | triangle *PES*.

Mais composant *OA* | *OA* plus 2*OA*, ou bien 3*OA* plus 2*CA* || le triangle *APB* | triangle *APE* plus le triangle *PES* qui sont ensemble égaux à la figure *PAES*.

Mais comme on aura toujours la même analogie pour tous les points de la Courbe génératrice, & que tous les triangles *APE* ensemble composent le demi-cercle *DBA*, & toutes les figures *PAES* aussi prises ensemble composent toute la superficie de la roulette, on aura le demi-cercle générateur *DBA* | la demi-roulet-

ADPV || *OA* rayon du cercle base | 3*OA* plus 2*CA*, ce qui est trois fois le rayon du cercle base plus deux fois le rayon du cercle générateur.

Lorsque les convexitez du cercle générateur & du cercle base sont tournées du même côté, la même analogie subsiste, mais non pas avec addition, mais par soustraction, ce qui vient de la suite des comparaisons.

On aura aussi par ce même moien le rapport des secteurs du cercle générateur aux portions de la superficie de la * roulette, lesquelles seront faites par une ligne comme *AP* perpendiculaire à la Courbe de la roulette en *P*. Car nous avons vû dans les touchantes, que si l'on mene une ligne droite *AP* du point *A* où la génératrice touche la base jusqu'au point décrivant *P*, la ligne menée par *P* perpendiculaire à *AP* touchera la roulette en *P*; c'est-pourquoi la ligne *AP* est perpendiculaire à la Courbe de la roulette. Mais il s'ensuit aussi par la démonstration que je viens de donner, que le segment du cercle générateur *PEA* sera au segment ou portion de la roulette *PSVEA* || *OA* | 3*OA* plus 2*CA*.

* Pag. 358. in 4.

Il s'ensuit delà qu'une de ces roulettes étant donnée, on la peut diviser avec une ligne droite perpendiculaire à sa Courbe comme *AP* dans quelle raison on voudra, en divisant le cercle générateur *DPA* dans la même raison donnée par une corde comme *AP*, ce qui est facile en supposant cette division du cercle.

Pour la longueur de la Courbe de la roulette, on la détermine en cette maniére. Si les portions indéfiniment petites comme *AE* du cercle générateur sont toutes égales entr'elles, aussi

tous les angles comme *CEQ* seront égaux entr'eux, qui sont aussi égaux aux angles *PES*. Mais comme on considere les triangles *PES* comme isosceles dont les bases *PS* sont portions de la roulette, il est évident que toutes ces bases *PS* auront entr'elles la même raison que les côtez *PE*. Mais les côtez *PE* sont les cordes du demi-cercle *DBA*, & toutes ces cordes étant élevées perpendiculairement sur les parties *AE* du demi-cercle, font une superficie égale au quarré du diametre *DA*, ce qui est connu.

Mais aussi la premiére corde qui est *DA* aura même raison à la premiére base *PS*, que toutes les cordes ensemble à toutes les bases ensemble, & la premiére base *PS* est l'arc *MN* compris entre *EC* & *EQ*. C'est-pourquoi le produit de *DA* par toutes les *PS* prises ensemble, sera égal au produit de *MN* par toutes les cordes prises ensemble.

*Pag.359. in 4. * Mais la base *NM* dans ce cas de la figure, est égale à *ND* ou *AE* son égale plus *DM*. Et toutes les cordes prises ensemble & multipliées par *AE* ou *ND*, sont égales à la somme du produit de chacune en particulier par la même *AE*, ce qui est égal au quarré du diamétre *DA*, comme nous avons dit. Donc *ND* | *NM* || le quarré de *DA* | produit de *DA* par toutes les *PS* prises ensemble; & à cause de la hauteur commune *DA*, on a *ND* | *NM* || *DA* | à toutes les *PS* prises ensemble.

Et par ce qu'on a démontré pour la superficie dans cet exemple, *ND* ou *AE* | *NM* || *ER* | *CR*, & aussi *ER* | *CR* || *OA* | 2 *OA* plus 2*AC*; donc enfin *OA* | 2*OA* plus 2*AC* || *DA* diamétre du cercle générateur | à la circonféren-

rence de la roulette DPV; ou bien ce qui est la même chose, en doublant les antecedens de cette analogie, & prenant ensuite la moitié de la premiére raison, on aura OA | OA plus AC || $2DA$ | DPV.

Pour ce qui est des portions de cette roulette comme PV, il s'ensuit de ce qui a été démontré, que si l'on fait OA | OA plus AC || $2EP$ qui est la corde de l'arc répondant à la portion de la roulette | à la portion PV de la roulette.

Si les convexitez de la génératrice & de la base étoient tournées du même côté, on trouveroit pour le second terme de l'analogie, OA moins AC, au lieu de OA plus AC, & le reste seroit de même.

Si dans cette roulette la base étoit une ligne droite, la composition tant de la superficie que de la circonférence se déprimeroit; ce qui est facile à voir.

Exemple II.

On peut encore déterminer d'une autre façon la superficie & la longueur de cette espece de roulette, & en même tems celles des roulettes allongées ou raccourcies, lesquelles sont formées par des points qui sont au dedans ou au dehors du cercle générateur qui roule sur un autre cercle.

* *Lemme I.*

* Pag. 360. in 4.

Soient le † demi-cercle BDV, dont le diamétre est BV, & le centre C; soit CD un rayon

V 4

† Fig. X.

yon perpendiculaire à *BV*, & quelque ligne droite *P*π parallele à *BV*, qui rencontre le cercle en *P* & π. Si ſur le diamétre prolongé ou non prolongé on prend quelque point *A*, & que de ce point on mene les lignes *AD*, *AP*, *A*π; je dis que le quarré de *AP* joint au quarré de *A*π ſera égal à deux fois le quarré de *AD*.

Des points *P* & π ſoient menées les perpendiculaires *PO*, $\pi\omega$ au diamétre *BV*. On aura par la conſtruction *CO* égale à *C*ω, & *PO* égale à $\pi\omega$. Mais à cauſe des triangles rectangles, *APO*, *ADC*, *A*$\pi\omega$, le quarré de *AP* eſt égal au quarré de *PO* plus le quarré de *AO*, lequel eſt égal au quarré de *AC* plus le quarré de *CO* plus deux rectangles *CA* par *CO*. Mais auſſi le quarré de *A*π eſt égal au quarré de $\pi\omega$ plus le quarré de *AC* plus le quarré de *C*ω moins deux rectangles *CA* par *C*ω; & aſſemblant ces deux valeurs, on aura le tout réduit à deux quarrez de *PO* plus deux quarrez de *CO* plus deux quarrez de *AC*. Mais le quarré de *PO* plus le quarré de *CO*, eſt égal au quarré de *CP* ou de *CD*; donc les deux quarrez de *AP* & de *A*π ſeront enſemble égaux à deux quarrez de *AC* plus deux quarrez de *CD*, leſquels ſont enſemble égaux à deux quarrez de *AD*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce ſera la même démonſtration ſi l'on prend le point *A* ſur le cercle en *V*, ou ſur le diamétre *BV* au dedans du cercle.

Lemme II.

† Les mêmes choſes étant poſées comme dans le Lemme précédent, ſi par le point *A* on

† FIG. XI.

on mene *AE* perpendiculaire à *VB* & soit *AE* de quelle grandeur ou voudra, laquelle soit la base de trois triangles *AEP*, *AEπ* & *AED*; je dis que les deux triangles ensemble *AEP*, *AEπ* sont doubles du triangle *AED*.

* Aiant mené les lignes *EO*, *Eω*, *EC*, on formera trois autres triangles *AEO*, *AEω*, *AEC*, qui seront égaux aux précédens, puisqu'ils ont la même base *AE* & les mêmes hauteurs. Mais ces trois triangles qui ont la même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs *Aω*, *AC*, *AO*, qui sont des grandeurs en proportion arithmetique par la construction; c'est-pourquoi la somme des extrêmes est double de celle du milieu, ce qui sera aussi des triangles qui sont en même proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.* * Pag. 361. in 4.

Si le point *A* étoit pris sur le diamétre *VB* au dedans du cercle; alors si *CA* est plus grande que *CO* ou *Cω*, le cas est le même que le précédent: mais si le point *O* ou *ω* tombe en *A*, alors *AO* est double de *AC*, & la proposition est évidente: Et enfin si *CA* est plus petite que *CO*, alors on aura la différence entre *AO* & *Aω* qui sera double de *AC*, & ce sera la même chose pour les triangles.

Construction & démonstration de la Proposition.

† Soit le cercle *AVN* dont le centre est *O* pour la base de la roulette, & le cercle générateur *DBA* dont le centre est *C*, & le point décrivant *F* placé où l'on voudra.

Il est évident que dans le roulement du cercle générateur *DBA* sur la base, le point décrivant tracera un cercle *FIHG* concentrique au gé-

† Fig. XII.

générateur, & par rapport à ce cercle *DBA* & ſur ſon plan, dans toutes ſes poſitions différentes ſur la baſe; mais le point décrivant tracera la roulette *FM* par rapport à la baſe & ſur ſon plan.

Soit le point décrivant *F* en quelque poſition comme en *I*. Si par le point *I* on mene *IK* parallele au diamétre *DA* du cercle générateur qui paſſe par le centre *O* de la baſe, quand le point décrivant eſt en *I*, & qu'on mene auſſi les lignes *Ii*, *Kk* & *CB* perpendiculaires au diamétre; & qu'on ſuppoſe que le cercle générateur ſe ſoit avancé ſur la baſe en roulant, d'une partie *AE* indéfiniment petite; aiant tiré les lignes *AI*, *AH*, *AK*; *EI*, *EH*, *EK*; & *Ei*, *EC*, *Ek*, on aura par le Lemme 2. les deux triangles enſemble *AEI*, *AEK*, qui ſont égaux aux * deux triangles *AEi*, *AEk*, à cauſe des hauteurs égales, égaux au double du triangle *AEH*, égal au triangle *AEC*, & qui eſt auſſi égal au triangle *AEB*; donc tous les triangles enſemble *AEI*, *AEK* dans la roulette *FMNA* ſeront auſſi égaux au double de tous les triangles *AEB* ou *AEC*, puiſqu'ils auront tous les mêmes petits arcs *AE* du cercle *ABD* pour baſe: mais la baſe *AVN* étant égale au demi-cercle *AB*, tous les triangles comme *AEI*, dont *AEK* en ſera auſſi un, ſeront enſemble égaux à tous les triangles *AEB* ou *AEC*, qui auront les mêmes baſes *AE* qui compoſent le demi-cercle *ABD*; donc enfin tous les triangles comme *AEI*, ſeront égaux à la ſurface du demi-cercle *ABD*, à laquelle tous les triangles *AEB* ou *AEC* ſont égaux; ce qui eſt évident.

* Pag. 362 in 4.

Ce ſera la même choſe ſi le point décrivant eſt ſur la circonférence du cercle générateur *ABD*.

Mais

Mais outre les triangles *AEI* dans la superficie de la roulette, il y en a encore d'autres comme *EIR* ou *AIR* pour la remplir entierement, suivant ce que nous avons dit d'abord dans la génération; & tous ces triangles sont semblables, car ils doivent tous avoir un même angle en *E* ou en *A*, & leurs côtez seront *EI*, *EH*, *EK*, ou bien *AI*, *AH*, *AK*; car on regarde ces lignes comme égales entr'elles, les points *A* & *E* étant pris pour un même point. C'est pourquoi tous ces triangles semblables seront entr'eux comme les quarrez de leurs côtez *AI*, *AH*, *AK*. Mais par le Lemme 1. le quarré de *AI* & le quarré de *AK* seront ensemble égaux au double du quarré de *AH*; c'est-pourquoi les deux triangles semblables *AIR*, *AKX* seront ensemble égaux au double du triangle semblable *AHT*.

Il ne reste donc plus qu'à connoître la somme de tous les triangles *AHT* ou *EHT*.

J'ai déja expliqué que tous les angles du sommet, comme *HET* de ces triangles semblables, doivent être égaux à l'angle *CEQ* qui est l'exterieur du triangle *CEO*, & qui est égal aux deux interieurs *OCE*, *COE*.

*Je dis maintenant que si par le point *O* on mene la ligne *Ob* parallele à *AH* ou *EH* qu'on regarde comme la même, & qu'au point *b* on éleve sur *Ob* la perpendiculaire *bq* laquelle rencontre en *q* la ligne *OC*; & qu'on fasse comme *OA* à *OA* plus *Oq*, ainsi la superficie du demi-cercle générateur *DBA*, à une autre superficie, cette superficie sera égale à celle de la demi-roulette *FMNVA*, soit interieure, soit exterieure, soit moïenne; ce que je démontre comme il suit. *Pag. 363. in 4.

Toute la ſuperficie de la demi-roulette eſt compoſée de quadrilateres comme *AERI* formez ſur tous les arcs *AE* du demi-cercle générateur *ABD*, leſquels par ce que nous venons de rapporter ſont égaux à autant de triangles *AEH* ou *AEC* qu'il y a d'arcs *AE* dans le cercle, & qui tout enſemble ſont égaux au demi-cercle *ABD*; plus à autant de triangles *EHY* ou *AHY* qu'il y a auſſi d'arcs *AE* dans le demi-cercle *ABD*.

Mais le triangle *AEC* eſt au triangle *AHY* dans la raiſon compoſée de la baſe *AE* à la baſe *HY*, & de la hauteur *CA* à la hauteur *AH*, car on conſidére ces triangles comme rectangles.

Mais *AE* eſt à *HY* dans la raiſon compoſée de la raiſon de *AE* à *CQ* qui eſt la partie de la ligne *CB* coupée par *OE* prolongée, & *AE* eſt à *CQ*, comme *OA* à *OC*, & de la raiſon de *CQ* à *HY* qui eſt auſſi celle de *EC* à *EH*, ou de *AC* à *AH*.

Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHY* ſera celle du produit de *AO* par *AC* par *CA*, au produit de *OC* par *AH* par *AH*, qui eſt celle du quarré de *CA* par *AO*, au quarré de *AH* par *OC*.

Mais par la conſtruction le quarré de *CA* eſt au quarré de *AH*; ou bien, ce qui eſt la même choſe, le quarré de *CO* eſt au quarré de *Ob*, comme *CO* à *Oq*: Donc la raiſon du triangle *AEC* au triangle *AHY* ſera celle de *CO* par *AO* à *Oq* par *OC*; & à cauſe du côté commun *CO*, ce ſera celle de *AO* à *Oq*.

Donc enfin le triangle *AEC* eſt au triangle
* Pag. *AHY** comme *AO* à *Oq*. Et compoſant le trian-
364. in 4. gle *AEO* eſt au triangle *AEC* plus le triangle *AHY*, ce qui forme la figure ou quadrilatere *AEYH*,

AETH, comme *AO* à *AO* plus *Oq*; & le triangle *AEC* est au quadrilatere *AETH*, comme tous les triangles *AEC* égaux entr'eux, qui forment le demi-cercle *ABD*, à tous les quadrilateres *AETH* égaux entr'eux, qui forment la roulette *FMNVA*. Donc *AO* sera à *AO* plus *Oq*, comme le demi-cercle *ABD* à la demi-roulette *FMNVA*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonstration & construction convient à toutes ces sortes de roulettes, soit que le point décrivant soit au dedans ou au dehors du cercle générateur, ou sur sa circonférence. Mais dans ce dernier cas il est évident qu'au lieu de *AH* on aura *AB*, ce qui donnera le triangle isoscele *ACB*, & par conséquent aussi le triangle isoscele *Abq*, d'où l'on voit que *CO* & *Cq* seront égales entr'elles; & par conséquent la raison de *OA* à *OA* plus *Oq*, se réduira à celle de *OA* à trois *OA* plus deux *CA*, qui est celle qu'on a trouvée par l'autre méthode dans l'éxemple précédent.

On trouvera aussi les parties de ces roulettes par les mêmes constructions. Et enfin ce sera la même chose pour toutes les roulettes tant allongées que raccourcies dont la base sera une ligne droite, qui n'est qu'un cercle dont le centre est à distance infinie; car alors les *Ob* & les *bq* qui sont paralleles aux *AH* & *Hp*, donneront des parties *AO*, *pq* aussi infinies; & les *AC* & *Cp* n'entrent point en comparaison avec elles, quoique dans leur étendue infinie elles ne laissent pas de conserver toujours la même raison des *AC* à *Cp*. C'est-pourquoi on aura alors le cercle générateur à la superficie de la roulette, comme *AO* infinie à *AO* infinie plus *Oq* infinie. Mais cette *Oq* infinie est composée

 de

de *AO* infinie & de *Aq* infinie, qu'on ne considére que comme *pq* infinie; & *AO* infinie étant à *pq* comme *AC* à *Cp*, le rapport du cercle générateur à ces sortes de roulettes, sera comme *AC* à *AC* plus *Ap*, ou comme *AC* à 2 *AC* plus *Cp*.

* Pag. 365. in 4. * Dans la premiére de ces roulettes où le point décrivant est sur le cercle générateur, & où alors *Cp* devient égale à *CA*, il s'ensuit que la surface de la roulette sera triple du cercle générateur, puisque *AC* plus *Ap* sera égal à trois *AC*.

Mais en général pour toutes ces roulettes qui ont la base en ligne droite, si l'on tire par le point *A* la ligne *Af* perpendiculaire à *CO*, & qu'on la prenne égale à *AH*, la ligne *Cf* sera le rayon d'un demi-cercle égal à la demi-roulette. Car par les démonstrations précédentes *CA* est à *CA* plus *Cp*, comme le demi-cercle générateur à la demi-roulette, & comme le quarré de *CA* au quarré de *CA* plus le quarré de *AH*, ce qui est égal au quarré de *Cf*.

Pour les longueurs de ces roulettes on voit dans la figure précedente qu'elles sont toutes composées de toutes les bases *IR* des triangles semblables *EIR* ou *AIR*, & ces bases sont entr'elles comme les côtez *IA*: c'est-pourquoi comme *IA* sera *IR* dans un des triangles, ainsi toutes les *IA*, à toutes les *IR* qui seront la longueur de la roulette.

Si l'on prend † la premiére ou la plus grande *IA* qui est *FA*, & la premiére ou la plus grande *IR* qui est *FZ* qu'on détermine dans cette figure, qui est la même que la précedente, & qu'on à seulement separée pour éviter la confusion

† Fig. XIII.

sion des lignes, en faisant comme *AC* à *AF*, ainsi *CQ* à *FZ*, ou bien en menant la ligne *AQ* qui rencontre en *Z* l'arc *FZ* décrit du centre *A* sur le rayon *AF*, ou *FZ* perpendiculaire à *DA*, ce qui est la même chose dans des arcs indéfiniment petits, comme on les suppose ici, on aura *FA* à *FZ*, comme toutes les *IA* à toutes les *IR* qui sont ensemble égales à la longueur de la roulette. Donc on a *FA* par toutes les *IR* égal à *FZ* par toutes les *IA*.

Soit mené *CE* qui coupe l'arc *GH* au point *s*, on aura l'arc *Gs* du cercle *FHG* semblable à l'arc *AE* du cercle *ABD*.

*Mais toutes les *IA* par *Gs* seront à toutes les *IA* par *FZ*, comme *Gs* à *FZ* à cause de la hauteur commune *IA*. Si l'on détermine donc toutes les *IA* par *Gs*, & qu'on connoisse le rapport de *Gs* à *FZ*, on aura toutes les *IA* par *FZ* qui doivent être égales à *FA* par toutes les *IR*. * Pag. 366. in 4.

Mais on trouvera la raison de *Gs* à *FZ* en considérant qu'elle est composée de celle de *Gs* à *AE*, qui est celle de *CG* à *CA*; & de celle de *AE* à *CQ*, qui est celle de *OA* à *OC*; & enfin de celle de *CQ* à *FZ*, qui est celle de *CA* à *AF*; & ces trois raisons font celle du produit de *CG* par *OA* par *CA* au produit de *CA* par *OC* par *AF*, laquelle se réduit à celle du produit de *CG* par *OA* au produit de *OC* par *AF*, à cause de la hauteur commune *CA*.

Et si l'on mene *OH* & *AR* parallele à *OH*, on aura *OC* à *CG* ou *CH*, comme *OA* à *Hr*; c'est-pourquoi le produit de *CG* par *OA* sera égal au produit de *OC* par *Hr*, & substituant ce produit de *OC* par *Hr*, à la place du produit de *CG* par *OA* dans la derniere raison trouvée,

vée; elle se réduira à celle du produit de *OC* par *Hr* au produit de *OC* par *AF*, laquelle se réduit encore à celle de *Hr* à *AF*, à cause de la hauteur commune *OC*, laquelle sera celle de *Gs* à *FZ*.

Il ne faut plus maintenant que trouver le produit de toutes les *IA* par *Gs*, & l'on en tirera par la raison de *Hr AF* le produit de toutes les *IA* par *FZ*, qui doit être égal au produit de *FA* par toutes les *IR*, & par conséquent ce produit étant divisé par *FA*, donnera toutes les *IR* égales à la longueur de la roulette.

† Le demi-cercle *FHG* étant donné avec son diamétre *FG* prolongé d'un côté & d'autre, & le point *A* aussi donné sur ce diamétre; si l'on mene le rayon *CH* perpendiculaire à *FG*; & menant aussi *AH* avec sa perpendiculaire *HP* qui rencontre le diamétre en *P*, on aura le rectangle de *AC* par *AP* égal au quarré de *AH*.

Maintenant si l'on fait *CV* égale à un demi *AP*, & qu'on prenne *VK* égale à *AC*, & qu'enfin du point *K* pour centre & pour rayon
* Pag. 367. in 4.
KV on décrive le demi-cercle *VNM*, * une ligne telle qu'on voudra *ON* perpendiculaire à *FA*, laquelle coupe les deux cercles en *P* & en *N*, sera *AI* égale à *VN*.

Car le quarré de *AH* est égal au rectangle de *AC* par *AP* par la construction, ou bien égal au rectangle de $2AC$ par $\frac{1}{2}AP$, & $\frac{1}{2}AP$ est égal à *CV*, & $2AC$ égal à *VM*.

Le quarré de *AI* est égal au quarré de *OI* plus le quarré de *AC* plus le quarré de *CO* plus le rectangle de $2AC$ par *CO*; & le quarré de *CI* étant égal au quarré de *OI* plus le quarré de *CO*, il s'ensuit que le quarré de *AI* sera égal au

† FIG. XIV.

au quarré de *CI* ou *CH* plus le quarré de *AC* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*, & enfin le quarré de *AI* sera égal au quarré de *AH* plus le rectangle de 2*AC* par *CO*.

Mais enfin le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *CO* plus le rectangle de 2*AC* ou *VM* par *VC* ou $\frac{1}{2}$*AP*, lequel est égal au quarré de *AH*, sera égal au quarré de *VN* par la construction; donc le quarré de *AI* sera égal au quarré de *VN*, & *AI* égale à *VN*. On fera une semblable démonstration si la ligne *ON* est au-dessous de *CH*.

On voit aussi que si l'on décrit une Parabole *VX* dont *VF* soit l'axe, *V* le sommet, & son parametre égal à *VM* ou 2*AC*, elle aura toutes ses ordonnées *OX* qui couperont les cercles *FHG*, *MNV* aux points *I* & *N*, égaux à *AI* & à *VN*.

Ainsi les ordonnées *OX* de la Parabole *VX* étant élevées perpendiculairement sur les points *I*, formeront une figure sur le cylindre droit qui a pour base le cercle *FHG*, laquelle sera égale à toutes les *AI* par *Gs*, ou égales ensemble à chaque *IA* par chaque *GS*, qu'on suppose égales entr'elles.

Il paroît enfin que si l'on éleve le plan de la Parabole *VX* perpendiculairement sur son axe *VM*, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette Parabole, sa superficie coupera de la superficie du cylindre droit qui a pour base le cercle *FHG*, la même figure que nous venons de déterminer. *Ce qu'il falloit faire.*

* On peut aussi faire la même operation d'une maniére un peu plus abregée, en se servant du calcul des lieux; c'est-pourquoi je l'emploierai

* Pag. 368. in 4.

dans

dans la methode suivante pour trouver d'une maniére différente de la précedente, la même valeur de toutes les *IA* par *Gs*.

Soit le † cercle *FIG* dont le centre est *C*, & sur son diamétre *FG* prolongé soit le point *A*, d'où soient menées les lignes *AI* à la circonférence du cercle. Du point *G* pour centre & pour rayon *GF* soit décrit le quart de cercle *FTS*, lequel aura son rayon double de celui du cercle *FHG*. Soit aussi dans le cercle *FIG* quelque corde *GI* prolongée en *T* jusqu'au cercle *FTS*. Du point *T* soit mené *TQ* perpendiculaire à *GS*. On sçait que *TQ* doit être égale à *GI*.

Maintenant soit fait $CG = r$. $GQ = y$. $CA = a$. donc $FG = 2r$.

Si l'on mene *AI* on trouvera sa valeur; car *GI* est la même que $TQ = \sqrt{4rr - yy}$.

Mais $4rr =$ au quarré de *GT* $| yy || 4rr - yy |$ $\frac{4rryy - y^4}{4rr} = IO$ quarré.

Mais aussi *CI* quarré moins *IO* quarré $=$ *CO* quarré, ce qui est $rr - \frac{4rryy + y^4}{4rr}$, ou bien $\frac{4r^4 - 4rryy + y^4}{4rr} = CO$ quarré, & par conséquent $\frac{2rr - yy}{2r} = CO$.

Donc enfin $a + \frac{2rr - yy}{2r}$, ou bien $\frac{2ar + 2rr - yy}{2r} = AO$, & par conséquent *AI* quarré $=$ *AO* quarré plus *IO* quarré, ce qui est $\frac{4aarr + 4r^4 + 8ar^3 - 4aryy - 4rryy + 4rryy + y^4}{4rr}$, ce qui

† Fig. XV.

qui se réduit à $\frac{raa + r^3 + 2rra - ayy}{r}$, ou bien à $aa + rr + 2ra - \frac{ayy}{r}$. Mais pour abreger soit $aa + rr + 2ra = dd = AF$ quarré; donc $dd - \frac{ayy}{r} = AI$ quarré, & faisant cette valeur $= zz = QX$ quarré, on aura $dd - \frac{ayy}{r} = zz$, ou bien $dd - zz = \frac{ayy}{r}$, ou enfin $dd - zz = \frac{rayy}{rr}$, qui est un lieu à l'Ellipse, laquelle passera par tous les points X, & qui sera très-facile à construire.

* Car si l'on prolonge GF jusqu'en M, & qu'on prenne $CM = CA$, & que sur GM comme diamétre on décrive le demi-cercle GbM qui rencontre CH prolongée en b, on aura Cb quarré = au rectangle CG par $CM = ra$. * Pag. 369. in 4.

C'est-pourquoi aiant mené Mb prolongée jusqu'à GS en V, on aura GM & GV pour les deux demi-axes de l'Ellipse MXV; & toutes les ordonnées comme XQ au petit axe de cette Ellipse seront égales aux IA, & les arcs FT seront égaux aux arcs FI.

Il s'ensuit donc que si l'on éleve toutes les ordonnées XQ sur les points T, on aura la même figure que si on élevoit les $IA = XQ$ sur les points T, & cette figure sera une portion de cylindre droit dont la base est le cercle FTS.

Cette figure déterminée se réduira comme la précedente pour en tirer la valeur de la longueur de la roulette cherchée.

On voit aussi que si l'on éleve l'Ellipse MXV perpendiculairement sur son axe GV, & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette

El-

Ellipse, la rencontre de la superficie avec celle du cylindre droit, dont la base est le cercle *FTS*, retranchera de ce dernier une figure égale à celle des *XT* élevées sur les points *T*.

Si la base de ces sortes de roulettes étoit une ligne droite, on trouvera par la même méthode la valeur de la superficie cherchée, qu'on pourra égaler à d'autres figures.

Exemple III.

Autre espece de roulette.

Si la génératrice de la roulette est une ligne droite, & que le point décrivant soit un des points de cette ligne, & que la base soit un cercle, on pourra connoître la superficie & la longueur de cette roulette, puisqu'on connoit tout ce qui est nécessaire pour ce sujet tant dans la génératrice que dans la base. Car puisque la ligne qui décrit la ligne droite par son évolution est un point à distance* infinie, & que celle qui décrit le cercle est un point à distance finie, on connoîtra comme on a fait ci-devant la grandeur des triangles qui composent cette roulette.

† Soit la ligne génératrice *AM* dont le point *P* joint au point *A* soit celui qui décrit la roulette, & que le cercle *AB* en soit la base. Aiant pris les parties *AE*, *EI* de la génératrice égales entr'elles & indéfiniment petites; lorsque les lignes *EC*, *IC* qui touchent celle qui décrit la génératrice *AM* par son évolution, seront jointes aux lignes *DE*, *DI* de celle qui décrit la base par son évolution, le point décrivant *P* ou

* Pag. 370. in 4.

† Fig. XVI.

ou *A* ſe ſera mû en *F* & en *Q*, & l'angle *PEF* ſera égal à l'angle *CEK*. De même l'angle *FIQ* ſera égal à l'angle *LIG*; car *CI* ſera poſée en *LI* quand *PE* eſt en *FE*, *LI* ſera parallele à *KE*: mais tous ces angles *CEK*, *LIG* & les autres ſemblables étant toujours égaux entr'eux par la conſtruction, les angles *PEF*, *FIQ* ſeront auſſi égaux entr'eux, puiſqu'ils ſont égaux à l'angle *CEK* ou aux angles égaux *ADE*, *EDI*.

Tous les triangles comme *PEF*, *FIQ* étant donc conſidérez comme iſoſcele qui ont l'angle du ſommet égal en tous; l'eſpace de la roulette *PQNOBA* en quelque endroit qu'elle ſoit terminée par ſa ligne décrivante comme en *ON* & par ſa baſe *ABO*, ſera égal à la ſomme de tous ces triangles iſoſceles ſemblables.

Mais tous ces triangles iſoſceles ſemblables ont tous leurs côtez en proportion arithmetique; car chaque côté ſera égal aux parties de la génératrice comme *EP*, *IP*, &c. qui augmentent de parties égales entr'elles, & à *PE*, *EI*, &c. C'eſt-pourquoi cet eſpace de la roulette *PQNOBA*, dont la baſe *ABO* ſera égale à la partie *AM* de la génératrice, ſera égal à un eſpace qui ſera au tiers du ſecteur de cercle *DABOD* comme le quarré de la ligne *AM* ou de la partie *ABO* de la baſe qui lui eſt égale, eſt au quarré du rayon *DA* de la baſe.

Car les angles *ADE*, *EDI* du ſecteur ſont égaux à ceux des triangles iſoſceles qui compoſent l'eſpace de la roulette, & auſſi en mêne nombre: mais ſi de tous les petits * ſecteurs comme *ADE*, *EDI* qui compoſent le grand ſecteur *ADOBA*, on en retranche des parties vers le ſommet *D* qui ſoient de petits triangles iſoſceles

* Pag. 371. in 4.

ſceles dont les côtez ſoient en proportion arithmetique depuis le point *D* juſqu'à la ligne *DO*, il eſt évident que la ſomme de tous ces petits triangles retranchez ſera égale au tiers du ſecteur. Mais auſſi chacun de ces petits triangles iſoſceles aura une même raiſon à celui qui lui répond dans la roulette comme *PEF* à celui qui eſt retranché de *ADE*; *FIQ* à celui qui eſt retranché de *ADI*, & ainſi des autres: c'eſt-pourquoi la ſomme des triangles retranchez du ſecteur de cercle, ſera à la ſomme des triangles ſemblables aux petits ſecteurs qui compoſent la roulette, comme un ſeul de ceux du ſecteur à un ſeul de ceux de l'eſpace de la roulette, qui pourra être le dernier dans l'un & dans l'autre. Mais le dernier du ſecteur a pour côté le rayon du cercle, & celui de l'eſpace de la roulette a pour côté la ligne *AM* ou la partie *ABO* de le baſe égale à *ON*; & l'un de ces triangles étant à l'autre comme le quarré de ſon côté au quarré de celui de l'autre, il eſt évident que le tiers du ſecteur *ABOD* ſera à l'eſpace de la roulette *AQNOBA*, comme le quarré de *DA* au quarré de *ON*. *Ce qu'il falloit démontrer pour l'eſpace.*

On peut déterminer auſſi cet eſpace en décrivant un cercle qui ait pour rayon *ON*, qui eſt la partie de la génératrice qui a décrit la roulette depuis le point décrivant *P*: car ſi l'on prend le tiers d'un ſecteur de ce cercle, lequel ſoit ſemblable au ſecteur de la baſe *ADOBA*, on aura l'eſpace de la roulette *AQNOBA*; ce qui eſt évident puiſque le ſecteur de la baſe ſera au ſecteur ſemblable du cercle qui a pour rayon *ON*, comme les quarrez des rayons de ces cercles, & les tiers de ces ſecteurs étant auſſi en mê-

même raison, celui du cercle dont le rayon est *ON* sera égal à l'espace qu'on cherche.

Pour la longueur de cette roulette, il est évident par la méthode que j'ai donnée ci-devant, qu'elle doit être égale à la somme de toutes les bases des petits triangles* isoscèles comme *AEF*, *FLQ*, &c. Mais toutes ces bases aiant entr'elles même raison que les côtez de ces mêmes triangles qui sont isosceles semblables entr'eux, & aux triangles ou secteurs égaux de la base *ADE*, *EDI*, si on en retranche de la base de semblables qui soient en progression arithmetique depuis le premier jusqu'au dernier, comme sont ceux de l'espace de la roulette, & comme je viens de dire en parlant de l'espace, il est évident que la somme de toutes les bases des petits triangles du secteur de la base de la roulette, sera à la somme de toutes les bases des triangles qui composent la roulette, comme celle du dernier de l'un à celle du dernier de l'autre: mais ces bases sont entr'elles comme leurs côtez qui sont dans le secteur de la base le rayon *DA*, & dans la roulette la ligne *ON*. Mais toutes les bases ensemble des petits triangles dans le secteur *ADOBA* de la base, sont égales à la moitié de la derniere prise autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire à la moitié de tout l'arc *ABO* du secteur de la base. Donc comme *DA* est à *ON*, ainsi la moitié de l'arc *ABO* sera à la Courbe *PQN* de la roulette; ou bien, ce qui est la même chose, cette Courbe de la roulette sera égale à la moitié de l'arc du secteur de cercle semblable au secteur de la base, & décrit sur le rayon *ON*.

* Pag. 372. in 4.

Ce que je viens de démontrer de la partie de la

la roulette *PQNOBA* se doit entendre de même de toute autre partie; car cette roulette est infinie si sa génératrice est supposée infinie, & elle fera plusieurs tours autour du cercle de la base; & pour déterminer tant l'espace que la longueur de sa ligne, si elle fait plus d'une révolution autour de la base, il faudra prendre pour secteur de cercle un ou plusieurs cercles entiers avec le secteur qui se trouvera de plus dans sa révolution, & comprendre dans sa superficie les espaces des révolutions inferieures autant de fois qu'il y aura de révolutions, ce qui est facile à voir par la génération.

On peut remarquer que cette roulette est aussi la ligne * qui est décrite par l'évolution du cercle dans le tout ou dans ses parties, ou même dans plusieurs révolutions. C'est aussi une espece de Spirale; car si l'on assemble tous les sommets *E*, *I* des triangles comme *AEF*, *FIQ* en un même point, au lieu qu'ils sont ici disposez autour de la circonférence du cercle, on en fera la Spirale d'*Archimede*, ce qui est facile à voir, car toutes les lignes comme *FE*, *QI* seront en proportion arithmetique, & comprendront des angles égaux autour du point commun qui sera le sommet de tous les triangles.

* Pag. 373. in 4.

Mais quoique l'on puisse considérer l'espace de la Spirale d'*Archimede* égal à celui de cette roulette, puisqu'il est composé de triangles égaux aux précédens & indéfiniment petits, ce qui est égal au tiers du secteur de cercle, dont le rayon est la ligne qui termine la Spirale, il ne s'ensuit pas que sa ligne soit égale à la moitié de l'arc de ce même secteur, qui est la somme des bases de tous les petits triangles *AF*, *EQ*, &c. comme avoit crû un célébre Géométre, n'aiant

n'aiant pas fait assez d'attention à la méthode des indivisibles. Car on ne peut pas appeller une ligne courbe continue, celle qui n'est composée que de petites lignes toutes separées & qui ne sont point touchantes, quoiqu'on les considére indéfiniment petites & indéfiniment proches les unes des autres, mais dont on ne peut pas démontrer que la différence avec la ligne proposée soit moindre qu'aucune quantité donnée. Il n'en est pas de même de la superficie de cette figure, où les petits trilignes qui la composent sont joints tous les uns aux autres, & approchent à l'infini de l'espace proposé.

*Voici de quelle maniére on peut donner une ligne droite égale à la Spirale d'*Archimede.

† Soit une portion de Spirale *CEFGO* comprise dans l'angle *ACO*, laquelle a été décrite par la ligne *CA* qui s'est mûe jusqu'en *CO* d'un mouvement égal, pendant que le point décrivant s'est mû aussi sur la ligne *CA* uniformément depuis le point *C* par l'espace *CA* égal à *CO*.

*Que la ligne *CO* soit divisée en parties indéfiniment petites aux points *N*, *Q*, *R*, &c. & l'angle *ACO* en de petits angles tous égaux entr'eux, & dont le nombre soit égal à celui des parties de la ligne *CO*, & que *PCO* en soit le dernier. Si par toutes les divisions de la ligne *CO* on lui mene des perpendiculaires comme *NG*, *QM*, *RS* qui pourront être considerées comme des arcs de cercles dont les rayons sont les lignes *CG*, *CF*, *CE* qui décroissent en proportion arithmétique par la génération de la Spirale, puisqu'elles sont menées du centre *C* jusqu'à

* Pag. 374. in 4.

† Fig. XVII.

qu'à sa circonférence aux points *GFE*, & qu'elles font des angles tous égaux entr'eux *OCG*, *GCF*, *FCE*, ces lignes *CG*, *CF*, *CE* seront aussi égales aux lignes *CN*, *CQ*, *CR*; c'est-pourquoi toutes les petites diagonales *OG*, *NM*, *QS*, &c. dans les petits quadrilateres *OPGN*, *NGMQ*, *QMSR* seront égales aux portions de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* comprises dans les angles égaux. Il s'ensuit donc aussi que la somme de toutes les diagonales *OG*, *NM*, *QS* dans le triangle *COP*, sera égale à toute la ligne spirale *OGEC*.

Maintenant si sur la même ligne *CO* on éleve les perpendiculaires *OB*, *ND*, *QH* par les points de division *ONQ*, &c. & qu'on les fasse égales chacunes à des lignes qui aient même raison à *CO*, que les lignes *OG*, *NM*, *QS* ont aux parties égales *ON*, *NQ*, *QR* de la ligne *CO*; ces lignes renfermeront un espace *CVHBO*, qui sera au quarré de *CO* qui est *CT*, comme la somme des lignes *OG*, *GE*, *EF*, c'est-à-dire la Spirale, à la somme des lignes égales *ON*, *NQ*, *QR*, c'est-à-dire la ligne droite *CO*, ce qui est évident, puisque chacune de ces lignes tant dans l'espace *CVBO* que dans le quarré *CT*, sont multipliées par les parties égales *ON*, *NQ*, *QR*.

Je dis maintenant que l'espace *CVBO* est un espace hyperbolique dont *CV* est le demi-axe déterminé, & *C* le centre. *Ce qui je démontre ainsi.*

Puisque les parties *ON*, *NQ*, *QR* sont des parties égales indéfiniment petites, aussi les parties de la Spirale *OG*, *GF*, *FE* ou *OG*, *NM*, *QS* seront indéfiniment petites,* & elles peuvent être supposées, ou touchantes, ou cordes de

* Pag. 375. in 4.

la

la Spirale. Soit *OI* perpendiculaire à *CO* & égale à l'arc de cercle *OA* qui a pour rayon *CO*, & qui est compris dans l'angle *ACO*.

Soit $CO = r$. $OI = s$, & les parties de *CO* comme $CQ = y$.

Aiant fait *CX* perpendiculaire à *CO*, & prolongé quelqu'une des diagonales comme *QS* en *X* sur *CX*, il y aura même raison de *QR* à *RS*, que de *QC* à *CX*.

Si l'on prolonge *QM* perpendiculaire à *CO* ou parallele à *OI* jusqu'à la rencontre de *CI* au point *K*; il est évident que la ligne *QK* sera égale à l'arc de cercle renfermé dans l'angle *ACO* sur le rayon *CQ*. Mais lorsque le point décrivant est en *Q* sur *CO*, ou en *F* sur la Spirale, s'il vient de *F* vers *E* ou de *Q* en *S*, il n'a plus que l'angle *ACF* à décrire, qui a même raison à tout l'angle *ACO* que *CQ* a à *CO*; car la ligne *CO* se meut également autour du point *C*, pendant que le point décrivant descend également de *O* vers *C*. La raison de *QR* à *RS* ou de *QC* à *CX*, doit donc être composée de celle de *CQ* à *QK*, & de celle de *CO* à *CQ*, qui est celle de *CO* à *QK*; mais *QK* est $\frac{sy}{r}$; donc *QR* à *RS* comme $r \mid \frac{sy}{r}$. Mais si l'on mene *OY* parallele à *QSX*, on trouvera $CY = \frac{sy}{r}$; car on aura $r \mid \frac{sy}{r} \,||\, r \mid \frac{sy}{r}$.

Mais puisque *OY* doit être égale à *QH*, & que l'on connoit seulement *OY* par son quarré qui est $= rr + \frac{ssyy}{rr}$, si l'on veut faire un lieu

de tous les points trouvez comme H, supposant $CQ = y$ comme on a fait, il faut poser $QH = x$, ce qui donnera l'équation du lieu $rr + \frac{ssyy}{rr} = xx$ ou $\frac{ssyy}{rr} = xx - rr$ à l'hyperbole. Ainsi l'on sçait que la ligne $VHDB$ est une hyperbole dont le demi-axe $CV = r$ qui est aussi $= CO$.

Mais par la nature de cette équation à l'hyperbole, il * est évident que si du point O on mene la ligne OL perpendiculaire sur CI jusqu'à la ligne CX en L, & que du sommet V de l'hyperbole on mene VZ parallele à CO & égale à CL, la ligne CZ sera l'asymptote de l'hyperbole VHB. Enfin si l'on fait que comme le quarré de CO qui est CT à l'espace hyperbolique $CVBO$, ainsi CO à une ligne droite, cette ligne droite sera égale à la longueur de la Spirale depuis le point O jusqu'au centre ou à l'œuil C de la Spirale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

* Pag. 376. in 4.

Exemple IV.

Voici encore un exemple de ces sortes de lignes.

† Soit la premiere roulette ABI qui a pour base la ligne droite AE, & pour cercle générateur EFI, & dont l'axe est EI. Si l'on forme une roulette AMN qui ait pour base la roulette ABI, & pour ligne génératrice une ligne droite, & que le commencement du roulement se fasse en A, on déterminera la superficie $ADINMA$, & la grandeur de sa ligne AMN en cette sorte.

Si l'on prend sur le cercle générateur de la roulette qui en est la base, des points comme

FGH

† FIG. XVIII.

FGH qui soient indéfiniment proches les uns des autres & à égale distance, & que par ces points on mene des paralleles *FB*, *GC*, *HD*, &c. à la base *AE* jusqu'à la rencontre de la roulette en *BCD*, & que la ligne génératrice se trouve dans les positions *BK*, *CL*, *DM* quand elle touche la base en *BCD*; à cause que les points *BCD* sont indéfiniment proches les uns des autres, on les peut regarder comme les sommets des triangles *KCL*, *LDM*, quoique ces sommets soient veritablement entre les points *BC* & *CD*. Mais ces triangles auront leurs angles du sommet *KCL*, *LDM* égaux entr'eux; car les lignes qui passent par les points *BCD*, & qui touchent les deux lignes qui décrivent par leur évolution la base & la génératrice, feront des angles égaux entr'eux, ce qui est évident, puisque la base étant une ligne droite, la ligne qui la décrit par son évolution est un point à distance infinie, & celle qui décrit * la base est une roulette semblable à la base, ce qui est connu. Mais les touchantes de cette roulette, ou bien les perpendiculaires à la roulette *ADI*, feront des lignes paralleles aux cordes du cercle *EF*, *EG*, *EH* qui feront des angles égaux entr'eux au point *E*; & par conséquent les touchantes *BK*, *CL*, *DM* de la roulette *ADI*, qui sont aussi paralleles aux cordes *IF*, *IG*, *IH* feront des angles égaux entr'eux, puisque ces cordes font des angles égaux entr'enx au point *I*.

* Pag. 377 in 4.

Mais par les proprietez connues de la roulette, on sçait que les longueurs des lignes *BK*, *CL*, *DM* sont égales au double de la différence qui est entre le diamétre *IE* du cercle générateur & les cordes *IF*, *IG*, *IH*: c'est pour-

quoi si du centre *I* & pour rayon *IE* on décrit le quart de cercle *EQR*, & si l'on prolonge les cordes *IF*, *IG*, *IH* jusqu'au quart de cercle en *OPQ*, les lignes *BK*, *CL*, *DM* seront chacune double de *FO*, *GP*, *HQ*: car les longueurs des parties de la roulette *IB*, *IC*, *ID* sont doubles des cordes *IF*, *IG*, *IH*, & toute la roulette *IA* est égale au double *IE*.

† Mais dans le demi-cercle toutes les cordes comme *IF* sont égales aux sinus comme *OS* du quart de cercle. C'est-pourquoi si l'on conçoit un cylindre droit sur le quart de cercle *EPR*, & que ce cylindre soit coupé par un plan incliné au plan de sa base d'un angle demi-droit & qui la rencontre en *RI*, on sçait que la superficie de ce quart de cylindre comprise entre la base & le plan coupant, sera égale à la superficie formée par tous les sinus sur leurs arcs, & égale au quarré du rayon *IE*; mais la superficie de ce cylindre qui a pour hauteur le rayon *IE*, sera égale au rectangle *IR* dont le côté *EPR* est égal à la circonférence du quart de cercle, & le côte *IE* égal au rayon du quart de cercle. Mais aussi la portion de cette superficie cylindrique comprise entre le plan coupant & le plan superieur, sera égale à la figure faite de toutes les parties *FO*, *GP*, *HQ*, qui sont les différences entre les sinus comme *OS*, ou les cordes comme *IF* & le rayon *IE* ou *IO*, * & cette figure *EGVR* sera le complément de la figure des sinus *EGVI*.

* Pag. 378. in 4.

Il est donc évident que toutes les lignes comme *OF*, *PG* dans le complément de la figure des sinus, garderont toutes entr'elles la même proportion que les côtez *BK*, *CL*, *DM*, des trian-

† FIG. XIX.

triangles qui compoſent la figure de la roulette *ALN*. Mais comme tous ces triangles ſont ſemblables comme *KCL*, *LDM*, &c. ils ſeront tous entr'eux comme les quarrez de leurs côtez, ou comme les cercles qui auront ces côtez pour rayons; & par conſéquent ſi l'on fait tourner la figure *EGVR* ſur la ligne *ER* comme axe, le Conoïde pointu qui s'en formera, ſera au cylindre qui ſe formera du rectangle *EV* qui tourne auſſi ſur *ER* pour axe, comme la ſomme de tous les petits triangles comme *KCL*, *LDM* qui compoſent la roulette *AIN*, au dernier triangle *INT* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette.

Mais le dernier triangle *INT* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette, eſt égal au quadruple du quart de cercle *IER*: car le dernier triangle qui a pour côté *IN*, eſt quadruple de celui qui a pour côté *IR*, & pour baſe une des diviſions du cercle comme *OP*: donc comme le cylindre formé par le rectangle *EV* eſt au conoïde formé par le complément de la figure des ſinus, ainſi le cercle entier ſur le rayon *EI* ſera à la ſuperficie de la roulette *ADINMA*; ou bien ſi ſur chacune des ordonnées *PT*, *Od* dans la figure des ſinus on prend *Pa*, *Ob* troiſiémes proportionnelles aprés *PT*, *PG* & *Od*, *OF*, &c. il y aura même raiſon du cercle ſur *PT* au cercle ſur *PG*, que de la ligne *PT* à la ligne *Pa*, &c. Donc le cylindre ſera au conoïde pointu comme le rectangle *EV* à la figure *EaVR*. Mais le rectangle *EV* n'étant conſideré que comme la moitié du cercle entier dont le rayon eſt *IE*, auſſi la figure *EaVR* ne donnera que la moitié de la roulette.

Maintenant pour la longueur de cette roulette *AMN*, puiſqu'il y a même raiſon entre la baſe *NT* du dernier * triangle *INT* pris autant de fois qu'il y a de triangles, à la ſomme des baſes de tous les triangles, que du rectangle *EV* au complément *EaVR* de la figure des ſinus; & que la ſomme de la baſe *NT* du dernier triangle, laquelle eſt double d'une des diviſions du quart de cercle comme *OP*, eſt double auſſi de la circonférence du quart de cercle; donc la circonférence du demi-cercle qui a pour rayon *IE*, ſera à la circonférence de la roulette *AMN*, comme le rectangle *EV* au complément *EGVR* de la figure des ſinus *EGVI*. Mais le rectangle *EV* eſt égal au demi-cercle dont le rayon eſt *IE*, & la figure des ſinus eſt égale au quarré du rayon: donc enfin la circonférence du demi-cercle dont *IE* eſt le rayon, ſera à la roulette *AMN* comme la ſuperficie du demi-cercle, à la différence de cette même ſuperficie avec le quarré du rayon. Mais la ſuperficie du demi-cercle eſt à la différence entre cette même ſuperficie & le quarré du rayon, comme *IV* circonférence du quart de cercle à la différence entre *IV* & *IE*; donc la longueur de la roulette ſera double de la différence entre *IV* & *IE*, qui eſt auſſi la différence double entre le diamétre du cercle générateur de la baſe & ſa demi-circonférence.

* Pag. 379. in 4.

M E-

METHODE GENERALE

Pour réduire toutes les Lignes courbes à des Roulettes, leur génératrice ou leur base étant donnée telle qu'on voudra.

Et premiérement la base étant donnée de position, il faut trouver la génératrice de la Courbe comme étant une Roulette.

Par M. DE LA HIRE.

† SOIT une ligne courbe *ADB* donnée telle qu'on voudra que l'on considére comme une roulette, dont la ligne ‡ *CB* droite ou courbe soit aussi donnée de position pour la base de cette roulette.

* De tous les points *DLN* de la Courbe *A*, soit mené à la Courbe les perpendiculaires *DF*, *LM*, *NO*, &c. indéfiniment proche les unes des autres, lesquelles rencontrent la base donnée en *F*, *M*, *O*, &c. * Pag. 380. in 4.

Sur quelqu'une de ces perpendiculaires comme *DF* pour base, soit formé le triangle *DFG*, dont le côté *DG* soit égal à la plus proche *LM* des perpendiculaires après *DF*, & le côté *FG* égal à la partie indéfiniment petite *FM* de la base donnée & comprise entre les perpendiculaires *DF*, *LM*. De même sur *DG* pour base égale à *LM* soit formé le triangle *DGH* dont le côté *GH* soit égal à *NO*, & le côté *GH* égal à *MO*, & ainsi de suite tant d'un côté que d'autre de la premiere *DF* qu'on a prise.

† 23. Août 1706. ‡ Fig. XX.

Il se formera par ce moien une ligne droite ou courbe *IHGFK* qui sera la génératrice de la Courbe *ADB* proposée pour roulette, & dont la base *CB* est donnée de position, & le point *D* qui est l'extrémité de la perpendiculaire *DF* qu'on a prise d'abord, sera le point décrivant de la roulette par rapport à la génératrice trouvée dans la position où elle est sur la base *CB*.

On voit par la formation de la génératrice trouvée *IHGFK* que lorsqu'elle roulera sur la base *CB* proposée, le même point *D* du plan de la génératrice, doit passer successivement par tous les points de la Courbe *DLN*. Car la génératrice touchera la base dans tous ses points *FMO*, lorsque les points de la génératrice *FGH* qui leur répondent y seront posez, & alors les lignes *DG*, *DH* seront jointes aux perpendiculaires *LM*, *NO*. Et par conséquent les lignes qui décrivent par leur évolution la base & la génératrice, auront une touchante commune qui passera par le point où la base & la génératrice se touchent; ce qui suit de ce qui a été démontré d'abord.

Les différentes bases proposées pour une même Courbe donnée comme roulette, formeront des génératrices différentes qui auront des proprietez particulieres, comme toutes les bases qui ne rencontreront pas perpendiculairement les roulettes proposées, donneront des génératrices * qu'on ne pourra terminer, quoique leur longueur soit connue qui est celle de la base. La Spirale dont tous ses rayons font des angles égaux avec elle, est une Courbe de cette nature; car si on la fait rouler sur une ligne droite qui lui serve de base, la roulette qu'elle formera sera une ligne droite; & si une li-

*Pag. 381. in 4.

ligne droite est proposée comme une roulette, & qu'on donne une autre ligne droite pour sa base qui ne lui soit pas parallele, on trouvera pour sa génératrice une Spirale telle que nous venons de l'exposer; mais si la base étoit parallele à la roulette, la génératrice seroit un cercle, & le centre en seroit le point décrivant; ce qui est vrai aussi de toutes sortes de Courbes proposées, quand on propose pour sa base une ligne qui lui est parallele; ce qui est évident, puisque tous les rayons comme *DF*, *DG*, *DH* seront tous égaux entr'eux.

Pour déterminer la nature de ces génératrices, il faut connoître quelque proprieté particuliere des perpendiculaires à la roulette proposée par rapport à la base donnée, ou quelque chose d'équivalent, comme on le verra clairement dans l'exemple suivant.

Exemple.

† Soit la Courbe *ADP* proposée comme une roulette, & soit donnée sa base *CB* une ligne droite. Aiant pris sur la Courbe les parties *AD*, *DP* indéfiniment petites, soient menées les perpendiculaires *AF*, *DM*, *PO* à la Courbe; mais aiant formé comme on a expliqué ci-devant le triangle *AFG*, ensorte que les points *FG* soient sur la génératrice, on donne cette proprieté, que dans tous les triangles comme *AFG* formez pour trouver la génératrice, l'angle *FAG* sera égal à l'angle *AED* que font les deux perpendiculaires *AF*, *DM* en se rencontrant au point *E*.

Il s'ensuit de cette proprieté donnée que le

† Fig. XXI.

triangle *AEM* ou *AEG*, car les deux points *M* & *G* ne sont regardez que comme un même point, sera isoscele; & par * conséquent l'angle *AMD* exterieur du triangle *AME* sera double de l'interieur *FAM* ou *FAG*.

* Pag. 382. in 4.

Mais par ce qui a été démontré ci-devant, le point qui décrit la roulette étant en *A*, la touchante de la ligne qui décrit la géneratrice *FG* par son évolution sera *FM* perpendiculaire à la géneratrice *FG* & à la base *CB*, & sera aussi jointe à celle qui décrit la base par son évolution.

De même dans la seconde position du point décrivant en *D*, la ligne qui décrit la géneratrice par son évolution comme *MK* sera aussi perpendiculaire à la base *CB*. C'est-pourquoi l'angle *DMK* sera plus grand que l'angle *AFM* de la quantité de l'angle *AED* ou son égal *FAG*.

Mais lorsque le point *D* étoit au point *A* & *DM* en *AG*, la ligne *KM* perpendiculaire à la géneratrice devoit être placée en *MG*, & elle devoit rencontrer *FM* en quelque point *N*, ensorte que l'angle *FNG* étoit double de l'angle *FAM*.

Car les points *M* & *G* n'étant considérez que comme un seul point, si l'angle *DMK* se meut sur *M*, & que son côté *MD* passe en *MA*, le côté *MK* passera en *MN* ou *GN*, & l'angle *KGN* sera égal à l'angle *DMA*. Mais l'angle *DMA* a été démontré double de l'angle *FAM*; donc l'angle *KGN* est double de l'angle *FAM* ou *FAG*. Mais aussi à cause des paralleles *FN*, *MK*, l'angle *FNG* sera égal à l'angle *KGN*; donc enfin l'angle *FNG* sera double de l'angle *FAG*.

H

Il s'ensuit delà que les points *FGA* seront à la circonférence d'un cercle dont le point *N* sera le centre, & les lignes *NF*, *NG*, *NA* seront égales entr'elles.

Si l'on poursuit la description de la génératrice comme on a enseigné, en cherchant un autre point *H*, ensorte que le triangle *AGH* soit formé par les lignes *PO* & *MO* sur *AG* égale à *DM*, on démontrera comme on a fait ci-devant que l'angle *GAH* sera la moitié de l'angle *G*ꝗ*H* formé par la ligne *GN* & par la ligne *OI* placée en *H*ꝗ, & qui rencontrera *GN* en quelque point ꝗ, & par conséquent* le cercle qui passeroit par les points *GHA* auroit son centre en ꝗ, & les lignes ꝗ*G*, ꝗ*H*, ꝗ*A* seroient égales entr'elles; mais ce point ꝗ placé sur *GN* ne peut pas être différent du point *N*, puisque *NG* & *NA* sont aussi égales entr'elles; c'est-pourquoi le point *N* sera le centre d'un cercle qui passera par les points *FGHA*.

* Pag. 383. in 4.

On fera la même démonstration pour tous les autres points qu'on trouvera de la génératrice; & par conséquent la génératrice cherchée sera un cercle qui aura *NF* pour son rayon, & dont le point décrivant *A* de la Courbe proposée, sera placé à l'extrémité d'un de ses diamétres.

Autre Exemple.

†Soit une Courbe *FB* donnée pour roulette, & la ligne droite *VA* aussi donnée pour sa base, & soit *FV* l'axe de la Courbe, qui est perpendiculaire à la Courbe en *F* & à la base en *V*.

Si de tous les points comme *B* de la Courbe on mene une perpendiculaire *BD* à la base,

† Fig. XXII.

la proprieté de cette Courbe est telle que si sur *BD* comme diamétre on décrit le demi-cercle *BOD*, & qu'on y mene la corde *BO* égale à l'axe *FV*, la ligne *BOA* sera perpendiculaire à la Courbe *FB* proposée.

Aiant tiré *DO*, on aura le triangle rectangle *DOB* semblable au triangle rectangle *ADB*; & par conséquent le rectangle *AO*, *OB* sera égal au quarré de *DO*.

Maintenant si sur quelque perpendiculaire à la Courbe comme *BA*, ou sur l'axe *FV* qui lui est aussi perpendiculaire, on forme la génératrice *AHI* par la méthode proposée ci-devant, le point *B* étant le point décrivant, & toutes les lignes comme *BA*, *BH* représentant dans cette génératrice les perpendiculaires à la Courbe, & *BI* étant la plus courte qui représente *FV*, *BI* sera aussi l'axe de la génératrice, & la perpendiculaire *Id* sur *BI* au point *I* représentera la base *KD* perpendiculaire à l'axe *FV* en *V*.

Il s'ensuit de la proprieté donnée que si du point *B* * pour centre & pour rayon *BI* égale à *FV*, on décrit un cercle *IEO*, il doit passer par tous les points comme *O* des lignes qui représentent sur la génératrice les perpendiculaires comme *BA* à la Courbe *FB*, & que *DI* menée du point *D* au point *I* de la génératrice, touchera le cercle en *I*, & sera égale à *DO*. Car par la formation de la génératrice, puisque la partie *BK* de la Courbe proposée *BKF* est indéfiniment petite, & *AB* étant perpendiculaire à la Courbe en *B*, on peut considérer *AK* comme égale à *AB*, de *KL* étant aussi perpendiculaire à la Courbe en *K*, le triangle *AKL* s'est placé en *ABH* pour la forma-

* Pag. 384. in 4.

ma-

mation de la génératrice, enforte que *AH* égale à *AL* eſt la corde indéfiniment petite de la génératrice, & par ce mouvement l'angle *BAK* eſt égal à l'angle *HAL*. Mais par le Lemme ſuivant l'angle *AKL* eſt double de l'angle *BAK*; donc tous les angles enſemble comme *ABH* égaux aux angles *AKL* qui ſont formez dans la génératrice par les lignes menées du point *B* aux points de cette génératrice jusqu'à l'axe *BI*, feront enſemble un angle *ABI* double de tous les angles *BAK*, ou de ceux que font toutes les cordes comme *HAL* les unes avec les autres qui ſera l'angle *IdT*. Et ſi par tous les points *K* on mene des paralleles *KS* aux perpendiculaires les plus proches comme *KA*, l'angle *AKS* étant égal à l'angle *BAK* qui eſt la moitié de l'angle *AKL*, on aura l'angle *SKL* égal à l'angle *BAK*. Mais auſſi tous les angles enſemble *SKL* que font toutes les perpendiculaires à la Courbe les unes avec les autres de ſuite, ne peuvent être égaux qu'à l'angle *ABD* fait de la premiére *AB* & de la derniere *VF*, ou de ſa parallele *DB*: c'eſt-pourquoi l'angle *ABI* ſera double de l'angle *ABD*, & par conſéquent la ligne *Id* perpendiculaire à *BI* en *I* tombera ſur *ID*, & les deux triangles *DBO*, *DBI* feront égaux & ſemblables, & *DI* touchera le cercle *IEO* en *I* & ſera égale à *DO*.

Mais de plus, puiſque l'angle *DBI* eſt égal à l'angle *DBA*, & que *ADT* touche la génératrice en *A* & qu'elle * rencontre l'axe *BI* en *T*, *DA* ſera égale à *DT*; & ſi du point *A* on mene *AR* parallele à *DI* ou perpendiculaire à l'axe *IB*, *IR* ſera égale à *IT*, ce qui eſt une proprieté de la touchante d'une parabole au point

* Pag. 385. in 4.

point *A*. Et comme ce sera la même chose pour tous les autres points de la génératrice *IHA*, les points *I* & *B* demeurant les mêmes, il s'ensuit que la génératrice sera une parabole.

Mais comme les deux triangles rectangles *TAR*, *ADO* ont leurs angles égaux en *T* & en *A*, ils seront semblables, & *TR* sera double de *AO*, comme *TA* est double de *AD*; donc *RI* est égale à *AO*, & par conséquent le rectangle *RI*, *IB* ou le rectangle *AO*, *OB* qui lui est égal puisque leur côtez sont égaux, lequel est égal au quarré de *DO*, sera aussi égal au quarré de *DI* qui sera le quart du quarré de *AR* ordonnée à l'axe *IB* & double de *DI*; donc enfin le point *B* est le foyer de cette parabole.

LEMME.

† Soit le demi-cercle *HIG* dont le diamétre *HG* est perpendiculaire sur la touchante *GA* prolongée vers *F*, & soit une corde *HI* appliquée dans le cercle & prolongée en *A* à la touchante *GA*.

Soit aussi *HE* perpendiculaire à *HA* au point *H*; & de quelque point *E* indéfiniment proche de *H* soit *EF* perpendiculaire à *GA* & par conséquent parallele à *HG*, & sur *EF* soit décrit le demi-cercle *ELF*. Du point *E* soit appliqué dans le cercle *ELF* la corde *EM* égale à la corde *HI* & prolongée en *D*, & soit mené *ELB* parallele à *HA*, & de plus la ligne *EA*.

A cause de l'angle *BED* indéfiniment petit, on a *EL* | *EM* || *ED* | *EB*. Mais à cause des paralleles qu'on a menées *EL* | *EM* ou *HI* son

† FIG. XXIII.

son égale || *EF* | *HG* & || *EB* | *HA* ou *EA* qu'on peut lui supposer égale: donc *ED*|*EB*|| *EB* | *EA*.

Mais *DA* étant indéfiniment petite par rapport à *EB* grandeur déterminée, si l'on mene *RBS* perpendiculaire à *EB*, on doit aussi la considérer comme perpendiculaire à *ED* & à *EA*.

* C'est-pourquoi aiant *ED* | *EB* || *EB* | *EA*, si l'on divise, on aura *ED* | *EB*—*ED*, ce qui est *DR* || *EB* | *EA* — *EB*, ce qui est *SA*, donc *ED* | *EB* || *DR* | *SA*. Mais la différence des deux *ED*, *EB* est indéfiniment petite; donc la différence des deux *DR*, *SA* qui sont elles-mêmes indéfiniment petites, sera encore indéfiniment petite; c'est-pourquoi elles doivent être considerées comme égales entr'elles, & *BR*, *BS* aussi égales; & par conséquent l'angle *BER* égal à l'angle *BES* égal à l'angle *EAH*; donc l'angle *AED* sera double de l'angle *EAH*.

* Pag. 386. in 4.

Secondement.

Une Courbe telle qu'on voudra étant proposée comme une roulette avec une autre Courbe aussi telle qu'on voudra pour être sa génératrice, & donnée de position avec un point de la roulette sur le plan de la génératrice, comme point décrivant, la génératrice étant dans la position donnée, il faut déterminer la base.

† Soit la Courbe proposée *AP* pour roulette, & la Courbe *BE* pour génératrice qui est donnée de position par rapport à la roulette *AP*, quand le point décrivant *P* du plan de la génératrice est aussi donné de position sur la roulette quand la génératrice est en *BE*.

On.

† FIG. XXIV.

On suppose qu'on sçache mener des perpendiculaires tant à la Courbe *AP* qu'à la génératrice *BE*.

Soit donc du point *P* la perpendiculaire *PB* à la roulette *AP*, laquelle rencontre en *B* la génératrice *BE*. Soit aussi par le point *B* de la génératrice la ligne *CB* qui lui soit perpendiculaire, & qui par les propositions précédentes doit aussi être perpendiculaire à la base dans ce même point *B*, quand le point *P* décrivant est sur la roulette. C'est-pourquoi si l'on mene *BF* perpendiculaire à *CB*, elle touchera la génératrice *BE* & la base aussi dans ce même point *B*; & par conséquent une portion de *BF* indéfiniment petite & contigue à ce point, sera considérée comme partie de la base & de la génératrice tout ensemble.

Mais soit un autre point *A* de la roulette indéfiniment* proche du point *P*, & par ce point *A* soit la perpendiculaire *AG* à la roulette, laquelle rencontre la génératrice en *G* dans la position où elle est, & la touchante *FB* en *I*. Maintenant si sur *PB* on forme le triangle *PHB* dont le côté *BH* soit égal à *BG*, & le côté *PH* égal à *AG*.

* Pag. 387. in 4.

Aiant fait mouvoir ce triangle *PHB* sur le point *B*, enforte que la ligne *BH* soit posée en *BI* sur *FB*, & le côté *HP* en *IL*, & *BP* en *BL*, l'angle *PBL* sera égal à l'angle *HBI*, & les points *G* & *I* ne doivent être considérez que comme un même point, puisque la partie *BI* de la touchante *FB* de la Courbe *GB* est indéfiniment petite.

Mais si dans cette position du triangle *HBP* en *ILB*, la ligne *IL* n'est pas posée sur *GA*, & ~~qu'elles fassent ensemble~~ un angle comme

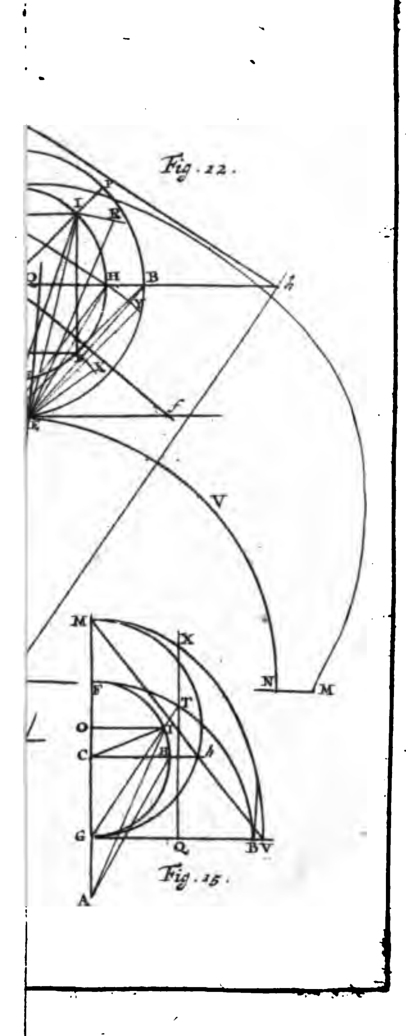
LIA,

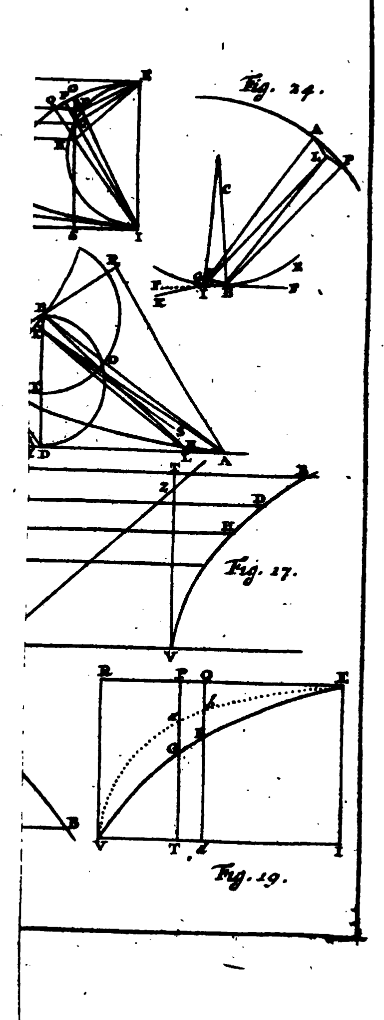
Fig. 3.

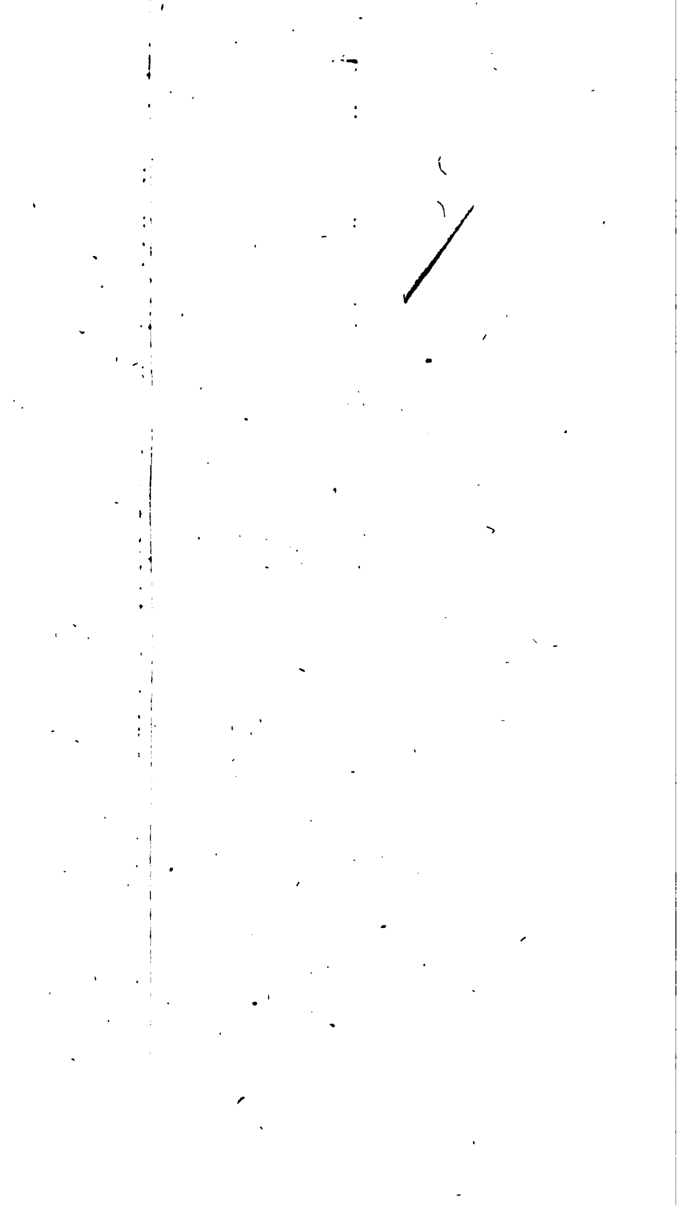
Fig. 2.

Fig. 5

Fig. 8


Fig. 12.
I
K
Q
H
B
h
X
f
V
N
M
M
X
F
T
O
C
H
h
G
Q
B
V
A
Fig. 15.


Fig. 24.
A
L
P
C
G
I
B
E
F
K
Fig. 17.
T
Z
B
D
H
V
R
P
Q
E
a
b
G
F
V
T
d
I
Fig. 19.



LIA, par le point *I* ſoit menée la ligne *IK* qui faſſe avec *FIB* au point *I*, l'angle *FIK* égal à l'angle *LIA*, il s'enſuit que ſi l'on fait mouvoir ſur le point *I* le plan ſur lequel eſt le triangle *BIL*, enſorte que la ligne *IL* qui eſt *GD* ou *IA* ſoit placée ſur *IA*, la ligne *IF* qui étoit touchante de la baſe en *B*, ſera placée en *IK*, & le point *G* de la géneratrice étant placé en *I*, toute la géneratrice aura changé de place dans cette ſeconde poſition, enſorte que la perpendiculaire à *IK* au point *I* ſera touchante des Courbes qui décrivent la géneratrice & la baſe par leur évolution, ce qui ſuit des premiéres propoſitions. Ainſi on aura les poſitions de toutes les touchantes indéfiniment petites de la baſe, comme *BI*, *IK*, &c. ce qui formera cette baſe.

Il s'enſuit delà que ſi le point *L* eſt joint au point *A* après le premier mouvement que la ligne *HP* a fait en *IL*, la baſe aura un recourbement dans le point *B*; mais ſi le point *L* eſt placé entre *P* & *A* comme dans cette figure, la baſe aura ſa convexité tournée vers *P*, au contraire ſi le point *L* eſt au delà de *AI*, la baſe aura ſa concavité tournée vers *A*, car il faudra dans le ſecond mouvement ramener *IL* en *IA*, ce qui ſuit des propoſitions qu'on a démontrées d'abord.

* On pourra auſſi déterminer la nature de la baſe ſi l'on a quelque proprieté particuliere tant de la roulette donnée que de la géneratrice: mais il me ſuffit d'en avoir indiqué la méthode, comme j'ai fait dans l'éxemple précédent pour la détermination de la géneratrice par les proprietez de la roulette & de la baſe.

* Pag. 388. in 4.

SUI-

SUITE DE LA PREMIERE

Partie du Supplément au Mémoire sur la Voix & sur les Tons.

PAR M. DODART.

IV. ADDITION.

De la différence des tons de la parole & de la voix du chant par rapport au recitatif, & par occasion, des expressions de la Musique antique & de la Musique moderne.

† JE n'avois pas dessein de rien dire sur la différence des tons de la voix de la parole & de la voix du chant: mais à l'occasion de ce que j'ai dit sur la différence du son de ces deux voix, je dirai ce que je pense sur la différence de leurs tons, sur ce en quoi elle consiste, sur l'usage qu'on en fait dans la Musique récitative, sur celui qu'on y en pourroit & peut-être qu'on y en devroit faire, & sur ce qu'on pourroit attendre pour la perfection de cet Art en ce qui est du chant, dans le progrès merveilleux qu'il a fait pour la symphonie depuis son renouvellement, c'est-à-dire depuis près de 700 ans jusqu'à présent. Car ce bel Art avoit été absolument perdu durant plus de 700 autres années avant *Gui d'Arezzo* pere de la Musique telle que nous l'avons, très-différente de l'antique, fort au-dessus pour le contre-point, & peut-être même pour le chant en ce qui regarde le plaisir de l'oreille, mais fort au-dessous en tout ce que le chant peut avoir

† 14. Avril 1706.

avoir de capable* de toucher le cœur par l'ex- *Pag. 389. in 4.
pression des mœurs & des passions, dont les anciens *Grecs* ont sçû tirer de si grands avantages. Car la Musique étoit chez les Anciens un Art très-serieux, étant consideré comme important au gouvernement des Etats par la part qu'ils lui donnoient à l'éducation de la jeunesse. Cet âge s'étendoit à cet égard jusqu'à 28 ans chez certains Peuples, & chez d'autres jusqu'à 30. Le but des Anciens du premier âge immédiatement après les tems heroïques, environ mille ans avant l'Ere commune, étoit de former les mœurs, de moderer les passions qui les pouvoient corrompre, & d'exiter celles qui pouvoient les regler & les conserver, & cela par un moien agréable capable d'insinuer la vertu. Celle ci étoit leur fin, & le plaisir le moien. Ainsi leur principale attention dans la Musique étoit d'émouvoir certaines passions, & calmer les autres pour parvenir au reglement des mœurs & toucher le cœur d'une maniére convenable à ces deux intentions. Quant au reste, c'est-à-dire le plaisir de l'oreille, ils n'y avoient l'égard qu'autant qu'il étoit possible sans préjudice de leur principale intention.

Il falloit donc imiter dans le chant les tons les plus naturels aux passions, & ces tons doivent être dans la Musique recitative, & on peut même dire en toute Musique, sur tout dans la vocale, les plus ressemblans qu'il se peut à ceux de la parole, car la parole a ses tons comme le chant a les siens. On connoît les tons de la parole dans la conversation; mais ces tons paroissent beaucoup plus dans les discours des personnes agitées de quelque passion que ce soit, & chaque passion a ses tons & ses mouvemens, au sens duquel on a coûtume de prendre ce mot en

Mu-

Musique. Les tons devroient être à peu près les mêmes en toute nation, car la nature est la même par tout; cependant il n'en est pas absolument ainsi. Il s'y mêle des tons d'institution qui sont ceux des Langues & des Dialectes; mais malgré ce mêlange un homme attentif à une conversation passionnée entre plusieurs personnes de quelque nation que ce soit dont il ignoreroit la Langue, distinguera *facilement par l'oreille seule quelle est la passion qui anime la conversation.

* Pag. 390. in 4.

Il n'est pas aisé de rapporter ces tons à la Musique. Une personne passionnée ne pense ni à chanter ni à divertir l'oreille, il ne tend uniquement qu'à toucher le cœur en la maniére qui lui convient; par éxemple, d'effroi ou de pitié, qui sont les passions regnantes dans le tragique, ou de quelqu'autre passion selon les occasions qui se présentent dans la vie commune. Tout cela n'est touchant dans les spectacles & dans la Musique, que parcequ'il l'est dans les actions ordinaires des hommes. Ainsi les tons & les mouvemens qui ont rapport aux passions ne sont touchans dans la Musique, qu'autant qu'ils sont conformes aux tons & aux mouvemens que la passion produit dans le commerce ordinaire. Les intervalles des sons de la parole ne sont souvent que d'un demi-ton, quelquefois hors de mode, souvent d'un quart de ton. Cependant c'est delà que dépend presque tout ce que la Musique peut avoir de touchant par l'expression des passions dans sa partie harmonique. Car ils en comprenoient six sous le nom de Musique. Celle qu'ils comptoient la premiére & qu'ils regardoient comme la principale étoit la Rythmique, & celle qu'ils comptoient la derniere & qu'ils considé-

déroient le moins étoit l'Harmonique. Ils souffroient les fautes & les licences en celle-ci, mais ils n'en pardonnoient aucune dans la Rythmique. Cette partie regloit les démarches & certains autres mouvemens, le tems & la cadence de la recitation, les gestes & la composition de toute la personne, & apparemment plus celle de son visage que de tout le reste du corps ; car ils vouloient que tout concourût à l'expression des mœurs & des passions. Cela étant, ce qu'ils pouvoient faire de mieux dans la partie harmonique de la Musique pour arriver à cette expression, c'étoit de se rendre attentifs aux inflexions naturelles de la voix passionnée, & de tâcher de les imiter dans la composition du chant. C'est ce qui a donné lieu au genre Chromatique de *Timothée* de *Milet* par les demi-tons * hors de mode, & à l'Enharmonique d'*Olympe* par la subdivision des semi-tons en quarts de ton. * Pag. 391. in 4.

On peut bien & mal user de ces subdivisions par rapport aux mœurs, car elles peuvent flatter les passions dangereuses, comme elles peuvent servir à en exciter de louables & d'utiles. Mais sans entrer ici dans l'abus qu'on en peut faire, ces subdivisions ont servi dans la Musique antique à former une partie de ses expressions, & d'ailleurs il paroît certain qui le genre enharmonique ne peut avoir été introduit que pour cette seule raison, n'offrant rien à l'oreille qui ne la doive blesser par la bizarrerie de ses intervalles, ni qui puisse plaire, sinon au cœur par une expression capable de le toucher, & par conséquent capable de lui plaire dans l'imitation. Car il semble qu'on peut regarder le cœur à cet égard comme l'organe d'un sixiéme sens d'autant plus

plus distingué des cinq sens externes, qu'aiant besoin des organes externes pour être ébranlé, & ne l'étant ordinairement que par leur rapport, il est souvent agréablement touché dans l'imitation, de ce qui frappe les sens desagréablement, & qui frapperoit le cœur de la même maniére, hors le cas de l'imitation.

Quoiqu'il en soit, les expressions de la Musique antique alloient à peindre les passions, dont les Legislateurs, les Magistrats & les Philosophes approuvoient la représentation pour former les mœurs de l'Etat à la magnanimité, à l'humanité & à la sagesse, par la crainte & la pitié; plus curieux d'instruire & de toucher le cœur par des sentimens qui font les grands hommes, que de plaire à l'oreille en flattant les passions basses qui les avilissent, & qui n'ont nul besoin du secours de la Musique pour être excitées. Ces chants si concertez d'après nature n'étoient accompagnez pour tout contre-point que d'une espece de contre-partie en quarte, en quinte ou en octave sur l'instrument qui accompagnoit la voix; car les Anciens ne reconnoissoient pour accords ni les tierces ni les sixtes qui donnent un si grand jeu à la composition à plusieurs parties.

* Pag. 392. in 4. * Cependant malgré cette simplicité ces chants faisoient sur les hommes, au moins une partie des grands effets ausquels toute l'antiquité rend témoignage. Effets surprenans qu'on a peine à croire en ce tems-ci, où on n'éprouve plus rien de pareil de la Musique. Il ne seroit pourtant pas impossible de prouver non seulement la possibilité, mais encore la verité d'une partie de ces grands effets. Mais cela ne se peut que dans un Mémoire particulier, celui-ci n'étant déja que trop long.

Il n'auroit peut-être pas été impossible aux Anciens de rendre leur melodie morale & pathetique plus agréable, en la joignant avec une basse continue, s'ils avoient sçû le contre-point. Ils auroient même pu y joindre plus d'agrément, s'ils avoient connu le contre-point figuré : mais l'honneur du premier contre-point étoit reservé † à l'onziéme Siecle de l'Ere commune, & l'honneur du second au ‡ quatorziéme. On pourroit donc dans 49 chordes du systême moderne, multipliées par le rétablissement des chordes du genre enharmonique jusqu'au nombre de 97, trouver tout ensemble & la Musique expressive des Anciens, & l'agrément de la symphonie moderne, malgré les demi-tons hors de mode du Chromatique, & les quarts de tons de l'Enharmonique : mais trois causes nous priveront toujours de cet avantage, malgré tous les efforts de la Musique moderne pour parvenir à l'expression. La premiére cause est l'impossibilité de faire entonner juste aux Musiciens des quarts de ton. C'est ce qui a fait renoncer toute la Musique antique depuis *Aristoxene*, & à plus forte raison toute la Musique moderne au genre Enharmonique. La seconde cause est le peu de litterature d'une grande partie des Maîtres de l'art. La troisiéme qui est une suite de la seconde, le peu d'attention que la plûpart des Maîtres donnent à imiter les tons naturels. Ce n'est pas que tous les Maîtres de Musique ne se piquent d'imiter, mais toute l'imitation que plusieurs se proposent ne consiste gueres en ce qu'il y a de moral dans le sujet. C'est, par exemple, monter le ton quand le mot *Ciel* entre dans la

† *A* Guy d'Arezzo *qui vivoit en* 1024.
‡ *A* Jean des Mars *qui vivoit en* 1353.

* Pag. 393. in 4. la * lettre du sujet, baisser le ton quand il y est parlé de la *Terre* & des abîmes, quoiqu'il fallût souvent faire tout le contraire par rapport au sens de la lettre. C'est encore imiter le bruit d'une tempête, ou d'un fracas, ou du tonnerre, ou l'agitation de la mer & des vents, quelquels chûtes ou quelques vols qui sont choses si étrangeres à tout ce qu'il peut y avoir de moral dans la Musique, que rien au monde n'est plus propre à le faire entiérement perdre de vûe. Cette imitation moderne consiste encore, & trop souvent, à exprimer par des tons & des mouvemens gais le sens d'une parole gaie, enclavée dans un sujet serieux, grave ou même triste, ou à représenter le sens d'une parole triste dans un sujet tout enjoué, & tout cela parce qu'une partie des Maîtres ne cherche dans la Musique que la surprise de l'oreille des Auditeurs, sans aucun égard à satisfaire leur propre raison & celle de l'Auditeur. Je passe sous silence ces longs passages † souvent composez de doubles & triples croches sur une seule syllabe, ces repetitions si multipliées, ces fugues & mille autres semblables jeux de composition, admirables surtout dans la Musique instrumentale, mais qui ne signifient rien dans la Musique vocale sinon la délicatesse, la souplesse & la legereté d'un gosier capable de franchir des passages à perte d'haleine, sur une seule syllabe, & le profond sçavoir d'un Compositeur capable de soûtenir l'agréable jeu de tant de parties les unes avec

† *J'en ai vû 46 sur une syllabe dans un motet d'*Occupati. *Ce motet étoit sur le dernier Vers. du Pseaume* CXVIII. Erravi sicut ovis quæ periit, quære servum tuum quia mandata tua non sum oblitus. *Et le passage étoit sur la syllabe* quæ *dans* quaere.

vec les autres. Car il n'y a personne qui ne s'apperçoive dans un moment de réflexion que tout cela ne va point au cœur, & n'est capable que de plaire à l'oreille & de la surprendre; ce qui paroît, comme j'ai dit ci-dessus, être l'unique ou le principal but de la Musique moderne. Il n'y a donc nulle apparence ni d'esperer le rétablissement de la Musique morale des Anciens pour la composition du chant & pour la culture politique des bonnes mœurs, ni de craindre ce rétablissement pour le mauvais effet qu'il pouvoit produire dans les mœurs, si on entreprenoit ce rétablissement sur le plan des mœurs publiques, & d'ailleurs rien n'est si opposé à la conciliation de * la Musique ancienne avec la moderne, quelque avantage réciproque qu'elles pussent tirer l'une de l'autre, que le charme des symphonies d'apresent, à cause de l'avantage que leur donne le systême moderne par ses 49 chordes sur le systême des *Grecs*, qui dans sa plus grande richesse n'a jamais eu que quinze chordes en chaque genre reglées sur l'étendue ordinaire de la voix. Cela suffit sur la différence des tons de la parole aux tons musicaux.

* Pag. 394. in 4.

V. ADDITION.

Les muscles propres des cartilages du larynx ne donnent aucun mouvement à la Glotte, qui ne soit contraire à la formation de la voix, ou qui y contribue immédiatement.

† J'ai dit dans les notes sur le Mémoire de la voix, que qui considérera bien les suites de la

† 4. Septembre 1706.

la Méchanique du larynx, telle que je l'ai décrite, tiendra pour prouvé que le ſeul uſage des muſcles propres exterieurs du larynx à l'égard de la voix, eſt de tenir ferme & ouverte la caiſſe compoſée des cartilages du larynx pour ſervir d'appui à la Glotte dans ſon mouvement actif, néceſſaire pour la voix: car elle a des mouvemens paſſifs par certains muſcles lateraux tant externes propres du larynx qu'internes propres à la Glotte même. Mais de ces muſcles les externes ne peuvent que relâcher la Glotte & par conſéquent nuire à la voix, & les internes ne peuvent gueres que faciliter l'évacuation des gros excremens du poûmon. J'avois invité dans la même note Meſſieurs les Anatomiſtes à éxaminer cette matiere qui paroît importante pour confirmer la cauſe précife de la voix. En attendant leur déciſion je dirai pour y donner lieu ce qui m'eſt venu dans l'eſprit ſur ce ſujet.

Tout ce que j'ai lu d'Anatomiſtes imprimez qui ſont entrez dans le détail des organes de la voix & des tons, ont cru que l'uſage des muſcles propres du larynx eſt de dilater la Glotte & de la reſſerrer ou de l'accourcir & la dilater pour les tons bas, & de l'allonger & étrecir pour les tons hauts.

* Pag. 395. in 4. * Il me paroît impoſſible que cela ſoit. La démonſtration Méchanique réſulte de la poſition des muſcles tant interieurs qu'exterieurs, telle qu'elle eſt décrite ſous la note ſuſdite; car elle démontre qu'ils ſont incapables d'augmenter ou diminuer la glotte, au moins d'une maniére qui puiſſe contribuer à la voix. De plus le raiſonnement ſuivant me ſemble démonſtratif.

Tous les mouvemens du larynx qui accourciroient la glotte approcheroient le cartilage anterieur des posterieurs. Or par cette approche ils en relacheroient les levres, & il faut nécessairement qu'elles soient bandées pour produire le son de la voix; car sans cela il n'y auroit nul fremissement, & sans fremissement il n'y auroit nul son de voix. De plus tous les mouvemens du larynx qui l'étreciroient iroient à l'allonger, ceux qui la dilateroient tendroient à l'accourcir. Or un de ces effets iroit à détruire ou à compenser l'autre, & par cette compensation il n'y auroit plus de changement de ton; car allonger est augmenter, & par-là tendre à produire un ton plus bas: étrecir est diminuer, & par-là tendre à produire un son plus haut. Ainsi le même mouvement iroit ou à produire deux effets incompatibles, ou à jetter à peu près le même son si on diminuoit autant l'ouverture en l'étrecissant qu'on l'augmenteroit en l'allongeant, & réciproquement si on diminuoit autant l'ouverture en l'accourcissant qu'on l'augmenteroit en la dilatant. Aussi voit-on dans la coupe ou embouchure des anches des haut-bois que celles qui sonnent le plus bas sont tout ensemble & les plus ouvertes & les plus longues, & que les anches qui sonnent le plus haut son tout ensemble & les plus serrées & les plus courtes. Les glottes depuis le plus bas âge où on a la voix la plus claire jusqu'à l'âge fait, où la voix est la plus grave vont toujours en s'ouvrant & s'allongeant de plus en plus à proportion du progrès de l'âge jusqu'à l'âge de puberté, où l'accroissement précipité de tout le larynx fait muer la voix.

VI. ADDITION.

*Pag. 396. in 4.

La suppression totale de l'air par la glotte fermée exactement, confirme la même verité.

On peut voir dans le Mémoire auquel celui-ci sert de supplément, la description de l'ouverture de la glotte en l'état où elle est mise pour produire la voix, & sous la note *b* l'état où est cette ouverture quand il ne s'agit que de respirer, ou de parler bas, ou de souffler, ou de donner issue aux excremens du poumon; car elle a tous ces usages sans compter le nombre infini d'usages differens renfermez dans celui de produire la voix dans les sons innombrables que l'execution de la Musique suppose. Mais il n'est parlé dans ce Mémoire qu'en un endroit & seulement en passant d'un troisiéme usage, qui consiste dans la suppression totale & volontaire de la respiration, & il n'en est dit qu'un mot dans les notes, parceque dans ces deux endroits il ne s'agissoit pas principalement de cet usage, mais indirectement.

Cependant on peut tirer un grand avantage pour l'établissement de la cause précise de la voix, de l'état où la glotte se met elle-même en supprimant l'air, & se rendant incapable par-là de produire en ce moment aucun son de voix. Car la cause principale & précise de la voix est fondée toute entiere sur le mouvement volontaire & actif des deux cordons musculeux tendineux qui constituent les levres de la glotte, & qui doivent produire tous les mouvemens. Or plus on est obligé de les reconnoître actifs pour la suppression totale de l'air, plus on doit les re-

reconnoitre actifs pour l'économie de la dépense de l'air dans son passage gradué pour la formation des différens sons. Car on ne peut fermer le passage de l'air qu'en passant par tous les degrez de resserrement depuis le premier jusqu'à l'extrême, duquel résulte la réduction de la ligne circulaire de chacune des levres à la ligne droite, d'où s'ensuit le contact immédiat des deux levres dans toute leur étendue, * & conséquemment l'entiere suppression de l'air. * Pag. 397. in 4.

Dans les premiers degrez d'approche mutuelle des deux levres, on peut chicaner en attribuant la cause du rétrecissement de la glotte pour la production de tons de la voix de bas en haut aux muscles internes du larynx: mais on ne leur peut attribuer ni de fermer entierement la glotte, ni de remplir entierement tout le canal du larynx. Or il faudroit qu'ils fissent l'un ou l'autre pour supprimer totalement la réspiration. Il ne faut que considérer le volume de ces muscles tapis sur le concave du larynx de part & d'autre de la glotte, les attaches haut & bas de chacun de ces muscles haut & bas au-dessous de la glotte, la nature & la situation des parties ausquelles ils sont attachez, pour voir qu'ils sont incapables de satisfaire à aucun de ces deux usages; & en effet, s'ils font quelque chose aux mouvemens de la glotte, c'est pour l'ouvrir quand elle est entiérement relachée pour laisser l'issue libre aux excremens du poûmon, & non pour la resserrer. De tout cela résulte ce raisonnement.

Les tons de la voix sont certainement l'effet d'un mouvement volontaire capable de resserrer la glotte moins ou plus en autant de dégrez qu'il y a de tons actuels & possibles. Ce mou-

vement volontaire ne peut être celui des muscles propres du larynx. Ce n'est pas celui des muscles externes tant anterieurs que posterieurs, qui ne peuvent que dilater la caisse du larynx en tout sens. Ce n'est pas celui des muscles externes lateraux qui ne peuvent que relâcher la glotte, ni celui des muscles internes qui ne peuvent que la dilater pour donner passage aux gros excremens du poûmon. Il faut donc que ce soit quelqu'autre partie soûmise à la volonté, qui par ses attaches & sa direction soit capable de resserrer la glotte naturellement ouverte, & de la resserrer en tous les degrez musicaux depuis son ouverture naturelle jusqu'à son entiere clôture exclusivement.

Or les cordons des levres de la glotte ont leurs attaches, leur direction, leur position très-convenable à cet effet * en tous degrez, & même à fermer exactement la glotte.

* Pag. 398. in 4.

Ces cordons doivent donc être chaçun de son côté l'organe du rétrecissement gradué de la glotte pour les tons musicaux du plus bas au plus haut son dans chaque glotte.

VII. ADDITION.

Les changemens de la Glotte viennent de la Glotte même par deux muscles de structure extraordinaire.

Comment ces cordons ne seroient-ils pas l'organe du rétrecissement gradué de la glotte, puisqu'ils sont certainement celui de la clôture absolue de la glotte? Car il est certain que la glotte ne peut passer de l'état de son ouverture naturelle, qui est celui qui convient à la respira-

ration libre, à celui de la clôture absolue, d'où s'ensuit la suppression de toute respiration; qu'en passant par tous les degrez possibles du rétrecissement. Or comme cette diminution poussée jusqu'à l'entiere suppression de l'air est absolument volontaire, il faut que l'organe de ce mouvement soit construit de maniére à pouvoir être commandé par la volonté ; il faut donc que chacun des cordons cachez dans les levres de la glotte soit ou un muscle ou quelque chose d'équivalent, c'est-à-dire un muscle d'une structure différente de la structure ordinaire du muscle, à moins qu'on ne voulut dire que la volonté de l'homme produit ce mouvement sans organe ; ce qui ne se peut dire en Physique, ni proposer en Métaphysique sans égaler la volonté de l'homme à celle du Créateur. Or c'est ce qu'on ne peut prétendre raisonnablement; ce n'est pas certainement un muscle ordinaire, c'est donc un organe extraordinaire équivalent à un muscle ordinaire, sinon dans sa structure, au moins dans son action.

Un Anatomiste célébre qui a bien voulu vérifier par une dissection exacte ce que je lui avois dit de ces cordons cachez dans les levres de la glotte, considéroit comme ligamenteux ces deux cordons que j'appellois musculeux * tendineux. C'est une epithete dont je m'étois avisé pour marquer par un mot inventé ce que je voyois d'extraordinaire dans ces cordons, musculeux dans leur action, quoiqu'ils ne paroissent que tendineux dans leur structure. Cet Anatomiste les considéroit comme simplement ligamenteux, parcequ'il n'y remarquoit non plus que moi aucune trace de fibres charnues à aucune des deux extrémitez, ni mêlées avec les

* Pag. 392. n. 4

fibres du cordon; mais seulement quelques fibres charnues paralleles à ces cordons, & qui ne faisoient pas un seul corps avec eux: de sorte que je ne croyois pas possible de soûtenir que ces fibres charnues fissent avec ces fibres tendineuses un corps de muscles capable de mouvement volontaire qui put constituer ces cordons tendineux en qualité de muscles, n'y trouvant pas la structure des autres muscles du corps humain. Je trouvois donc alors sa difficulté bien fondée, & elle l'étoit en effet à juger des choses selon la structure ordinaire.

Mais j'ai pensé depuis que l'action de ces cordons tendineux étant prouvée tant par leur position que par l'exclusion de toute autre cause capable de produire une action aussi marquée que celle qui produit le contact parfait des deux levres de la glotte, on ne pouvoit se dispenser de considérer ces deux cordons comme deux instrumens du mouvement volontaire, c'est-à-dire comme deux muscles d'une structure particuliere.

Dès qu'on ne peut se défendre d'admettre cette structure différente de celle de tout autre muscle, il est avantageux de la recevoir comme un nouvel exemple ajoûté au nombre infini d'autres exemples de structures différentes pour parvenir à un même effet, en d'autres genres d'effets qui prouvent comme celui-ci la richesse infinie de la Méchanique du Créateur.

Toutes les instances fondées sur les inconveniens prétendus, tirez du seul extraordinaire de la structure seroient donc alleguez mal à propos, à moins qu'on ne fit voir que cette structure extraordinaire est incompatible avec leur * action. Mais comment le pourroit-on montrer?

* Pag. 400. in 4.

trer? On connoît beaucoup mieux la ſtructure des grands muſcles de ſtructure ordinaire, mais on n'en ſçait gueres mieux ce que cette ſtructure contribue à leur accourciſſement; & qui pourroit empêcher que dans un auſſi petit muſcle on ne ſuppoſat une ſtructure tendineuſe inviſible ſemblable à celle qu'on remarque dans la partie charnue des autres muſcles? On connoît des contractions dans un nombre infini de fibres purement membraneuſes au moins en apparence, c'eſt-à-dire, autant que les yeux ſont capables de diſtinguer les parties dites vulgairement ſpermatiques de celles qu'on nomme charnues. Le mouvement periſtaltique des inteſtins grêles ne s'execute pas autrement que celui de l'éſophage. Les mouvemens periſtaltiques des boyaux ne ſont pas à la verité ſoûmis à la volonté, mais ils n'en ſont pas moins reglez en eux-mêmes, & il ne leur manque rien pour être cenſez volontaires, que d'attendre les ordres de la volonté pour entrer en exercice, & pour interrompre, preſſer, ou rallentir leur action. Cette action s'execute avec un ordre merveilleux, chaque fibre membraneuſe circulaire entrant en mouvement à ſon rang pour exprimer & tranſmettre la charge du boyau à la fibre voiſine inferieure qui ſe reſſerre à ſon tour pour le même effet: ſans que cette ſucceſſion de mouvement ſoit troublée ni interrompue tant que le beſoin ſubſiſte dans l'animal en ſanté à cet égard. Les mouvemens progreſſifs des vers ne ſont pas plus reglez, & perſonne ne peut nier que ces mouvemens dans les vers ne ſoient volontaires au moins ſelon la maniére ordinaire de parler, & parfaitement ſemblables au mouvement vermiculaire des boyaux quant à l'exe-

cution, quoique différente dans le principe.

La dépendance des muſcles à l'égard de la volonté eſt manifeſtement d'inſtitution, auſſi-bien que l'union d'une ame immortelle à un corps mortel. Ce n'eſt pas que l'Auteur de cette inſtitution n'ait donné des organes convenables à l'execution de cette dépendance, & ces organes* ſont les muſcles; mais on ne voit pas clairement dans ce qu'on connoît de leur ſtructure, comme il a été dit, la raiſon de leur mouvement, quoiqu'on ſoit aſſuré que cette ſtructure & l'influence des eſprits ſont la cauſe immédiate de leurs mouvemens. Il eſt vrai que les cordons de la glotte ſont fort différens des muſcles: mais s'il avoit plu au Créateur de les faire dépendre de la volonté, on en ſeroit quitte pour admettre deux ſortes d'inſtrumens, des mouvemens volontaires, c'eſt-à-dire des muſcles, les uns charnus & ſanguins, les autres ſpermatiques. Car enfin dans les fibres blanches comme dans les fibres rouges, le mouvement eſt également, contraction par l'influence des eſprits, & relachement par la ſuſpenſion du mouvement des eſprits ou par leur diſſipation. De quelque cauſe que procede le mouvement ou la ſuſpenſion du mouvement, il ſe fait également dans les fibres blanches comme dans les rouges, & apparemment par la même méchanique ou par une méchanique équivalente. La ſeule différence que j'y trouve eſt, que c'eſt le ſeul beſoin qui exige le mouvement des fibres blanches, & la ſeule volonté qui commande le mouvement des fibres rouges. Mais ni le beſoin, ni la volonté n'influent rien par eux-mêmes dans les organes. Le beſoin & la volonté précédent & accompagnent, l'un les mouvemens

* Pag. 401. in 4.

vemens des fibres blanches, l'autre ceux des fibres rouges : mais l'un & l'autre n'en sont que l'occasion, & ni l'un ni l'autre n'en sont les causes, puisqu'il est clair que sans l'institution divine le besoin exigeroit en vain les mouvemens des fibres blanches; & la volonté commanderoit inutilement celui des fibres rouges. Ces organes ne sont nullement soûmis par eux-mêmes ni à la volonté, ni au besoin. Car celui-ci ne peut être une cause active, puisque ce n'est souvent qu'une pure privation; & quant à la volonté, quelque active qu'elle soit en tout ce qui est compris dans l'étendue de son activité, c'est-à-dire de son pouvoir, elle en a aussi peu par elle-même sur les corps les plus délicats, que les corps les plus délicats & les plus mobiles ont par eux-mêmes peu d'intelligence pour recevoir les ordres de la volonté: pour * les comprendre & pour les executer. Y a-t-il donc quelque inconvenient de penser que le Créateur a soûmis ces deux cordons à la volonté, en les construisant capables de recevoir des esprits? Les Physiciens sont réduits à l'égard des mouvemens volontaires qui s'executent par des muscles de structure ordinaire de recourir à la seule institution du Créateur pour comprendre, autant qu'ils en sont capables; comment il se peut faire qu'une ame remue un corps, ce qui est encore plus difficile à concevoir, que de comprendre comment une ame peut être unie avec un corps. Sera-t-il donc plus difficile de reconnoître qu'une ame peut remuer un corps par un cordon de structure convenable, qu'il n'est difficile de comprendre qu'elle le peut remuer par un muscle de structure ordinaire, en vertu d'une institution toute-puissante, sans laquelle on ne peut

* Pag. 402. in 4.

entendre ni l'un ni l'autre, & par laquelle on entend également l'un & l'autre?

Les Physiciens qui regardent les brutes comme de pures machines, n'auroient nulle peine à admettre cette division de muscles sanguins & muscles spermatiques; car les mouvemens dits volontaires dans les bêtes ne s'executent selon cette opinion en conséquence d'aucun ordre de volonté, mais seulement à l'occasion des impulsions externes sur les organes des sens, d'où s'ensüivent nécessairement & méchaniquement les mouvemens dits volontaires dans les brutes. Ces mouvemens volontaires ne sont donc selon ces Physiciens en rien différens des mouvemens peristaltiques des boyaux des brutes, sinon que ces boyaux sont eux-mêmes tout ensemble l'organe d'un sens, c'est-à-dire, du toucher méchanique, en ce qui regarde leur œconomie & en même tems les organes du mouvement peristaltique. Et ainsi les deux structures dans les brutes sont également des organes destinez à entrer en exercice dès qu'une impression externe l'éxige.

Enfin si dans l'homme le cœur nous oblige de reconnoître au moins un muscle sanguin de structure ordinaire absolument indépendant de
* Pag 403. in 4. la volonté, sans aucun inconvenient, * pourquoi y auroit-il de l'inconvenient qu'il y eût un muscle spermatique de structure extraordinaire qui fût soûmis à la volonté? J'avoue que pour moi je n'y en vois aucun. Il y auroit un très-grand inconvenient à rendre l'homme maître absolu des mouvemens vitaux du cœur par sa seule volonté, ce qui seroit le rendre maître absolu de sa vie, & il y auroit un autre inconvenient très-considérable à ne le rendre pas

maitre

maître des mouvemens nécessaires pour la production de la voix & des tons qui font partie de la parole ; ce qui seroit le rendre incapable de la societé. Or la societé est absolument nécessaire à la vie humaine.

Je donne donc pour vrai & pour prouvé dans ce Supplément, ce que je n'ai avancé que comme probable dans le Mémoire & dans les Notes. C'est-à-dire que les cordons de la glotte sont de vrais muscles quant à leur usage, & conséquemment des muscles d'une structure extraordinaire & singuliere dans l'homme.

VIII. ADDITION.

Ces cordons tendineux de la glotte surmontent sans effort l'effort de plusieurs grands muscles & de l'air supprimé, non par leur propre force, mais par une adresse de méchanique naturelle, qui consiste toute, 1. dans leur position, 2. dans la simplicité d'un sphincter rectiligne.

Avant que de quitter cet usage de la glotte si opposé à la voix, puisqu'il n'est établi que pour supprimer l'air, & cependant si propre à en démontrer l'organe ; je tâcherai de donner la solution d'une difficulté que *Galien* à proposée sans la résoudre, s'étant contenté d'admirer ce qu'il auroit aisément compris s'il avoit voulu faire usage de la connoissance qu'il avoit de la Méchanique.

J'ai dit sous le renvoi ci-dessus que la suppression de l'air est une action sans comparaison plus forte que la voix, & cela est vrai ; car la clôture entiere suppose tous les degrez d'actions nécessaires pour le chant. Mais la suppression

pression totale comprend actuellement outre tous les degrez* nécessaires pour le chant celui qui est nécessaire pour la suppression totale. *Galien* prouve la force de cette action par la force des muscles du bas ventre, de ceux qui resserrent la poitrine, & de ceux qui remuent les bras dans les actions les plus fortes de tous ces muscles, ou de la plûpart, comme dans l'éternuement, dans les plus pressantes nécessitez de vuider un ventre paresseux ou d'assener quelque coup de toute sa force. Car dans toutes ces occasions si importantes & si nécessaires à la vie & à plusieurs arts, ces deux petits cordons seuls joints ensemble, tiennent contre huit grands muscles qui couvrent tout le ventre, quatre grands muscles très-composez qui resserrent la poitrine, sans compter les autres muscles que plusieurs Anatomistes croient non sans quelque fondement capables de la même action, comme les intercostaux. *Galien* admire cette résistance, & en effet elle est admirable: mais on y doit plus admirer la position que la force, car tout cela se fait sans grand effort. En voici la preuve. Ces cordons de la glotte n'agissent que sur le fondement que leur donnent les muscles exterieurs du larynx anterieurs & posterieurs, qui ne sont que quatre, très-foibles par leur position, & par-là incapables de soûtenir la contraction de ces deux cordons si elle avoit une force considérable. La contraction de ces deux cordons tendineux est donc manifestement une action foible. Tout cela augmente de beaucoup la difficulté proposée par *Galien*. Ce qui suit la pourra résoudre.

*Pag. 404. in 4.

Il faut rabattre de l'effort des huit muscles du bas ventre bandez contre les muscles de la glotte,

glotte, tantôt pour l'accouchement, tantôt pour l'évacuation d'un ventre pareſſeux, tout ce qui peut être ſoûtenu de cet effort par l'action du diaphragme bandé, qui en cette action eſt le principal antagoniſte de ces huit muſcles. Il eſt vrai que l'air reſpiré qui emplit la poitrine pour appuier l'action du diaphragme appuie ſa contraction, & l'appuie de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie de plus en plus en s'échauffant dans la poitrine où il eſt retenu. Il faut donc rabattre ſur * l'effort du diaphragme contre les huit muſcles du bas ventre, tout ce que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuent à la réſiſtance du diaphragme contre ces huit muſcles. Et il faut tenir compte aux deux petits cordons de la glotte de toute la part que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les poûmons contribuent à la réſiſtance du diaphragme; car ce ſont eux ſeuls qui tiennent contre ce volume d'air qui a part à la réſiſtance du diaphragme. Or cette part n'eſt pas petite. Car il y faut ajoûter l'effort que les muſcles qui reſſerrent la poitrine font contre l'air qui la dilate, pour le reſſerrer de plus en plus à meſure qu'il ſe rarefie, & réunir tout ſon effort contre le diaphragme qui doit preſſer les boyaux de plus en plus pour concourir avec les huit muſcles du bas ventre à chaſſer ce qui charge & incommode le ventre dans les deux ſexes, & la matrice dans les accouchemens. Or cette action eſt ſi forte qu'elle va ſouvent juſqu'à jetter une partie des boyaux & même la matrice hors de la capacité du ventre, c'eſt-à-dire les boyaux dans les deux ſexes, & la matrice dans les femmes: les boyaux en forçant l'ouverture étroite & très-forte

* Pag. 405. in 4.

des

des muſcles obliques & tranſverſaux du bas ventre menagée dans les aponevroſes pour donner paſſage au cordon des vaiſſeaux ſpermatiques dans les hommes, & aux ligamens ronds dans les femmes: la matrice, malgré les fortes attaches qui devroient la retenir en ſa ſituation naturelle. Or le plus fort de cette action, qui eſt le dernier degré de cet effort, & tout entier de l'air rarefié preſſé par les côtes ſur le diaphragme; car le diaphragme contrebandé & retenu par le mediaſtin, ne peut par lui-même que commencer l'action en diminuant ſa vouture naturelle pour diminuer d'autant la capacité du ventre. Il faut donc reconnoître que le plus pénible de cet effort eſt réſervé aux deux foibles cordons de la glotte; car ce n'eſt que leur contact immédiat qui ſoûtient l'effort de l'air rarefié, preſſé par les muſcles intercoſtaux, par le diaphragme, & par tous les muſcles du ventre.

*Pag. 406. in 4. * Cet effort paroît fort ſuperieu à la force de ces deux petits muſcles tendineux à n'en conſidérer que le volume & les fibres: mais ſi on en conſidére la ſituation & la direction, c'eſt toute autre choſe; car ils ſont poſez de ſorte que ſans effort ils peuvent ſoûtenir les plus grands efforts de tout ce grand nombre de grands muſcles dont j'ai fait mention. Voici comment.

Les liquides qui n'ont point de reſſort n'ont de force que ſelon leur poids, & leur poids n'agit que ſuivant leur hauteur. Les liquides qui ont reſſort agiſſent en tout ſens, dès que les cauſes de la rarefaction mettent leur reſſort en état d'agir: mais les uns & les autres agiſſent en ligne directe, les premiers de haut en bas ſelon le diamétre & la hauteur de leur colomne, les ſeconds du centre à la circonférence en tout

ſens.

sens. Or l'air est un des liquides capables de rarefaction.

Cela étant, l'effort de l'air retenu & rarefié dans la poitrine se doit partager sur toutes les parties solides de la capacité de la poitrine qui en doivent soûtenir chacune leur part. La glotte ne doit soûtenir que la colomne ou la base du cone qui convient au diamétre du larynx en sa partie superieure, ou plûtot la colomne qui convient à son ouverture naturelle : car la partie solide de la glotte doit être en cela considerée, à peu près, comme le reste de la circonférence concave de la poitrine.

Ainsi ces deux petits muscles ne se trouvent chargez que de repousser l'air qui porte contre cette ouverture, ou plutôt celui qui porte contre le contact des deux levres jointes l'une à l'autre. Or elles sont jointes l'une à l'autre par un contact immédiat. Cet effort se réduiroit donc presqu'à rien, c'est-à-dire à l'exercice de la seule force nécessaire pour contrebander les attaches du demi tympan de part & d'autre de l'ouverture jusqu'au point de rendre droite la ligne circulaire de chaque levre.

Il est vrai qu'une colomne d'air égale à la capacité du larynx fait quelque effort contre le tympan : mais c'est à peu près comme quelqu'un qui voudroit passer au travers* d'une ouverture fermée par deux coulisses, en poussant à plomb contre cette double coulisse parfaitement jointe au milieu de cette ouverture, & bien arrêtée haut & bas. Car l'effort de l'air n'est que de bas en haut, & la force des levres & leur direction d'avant en arriere. De sorte qu'au pis aller l'effort de l'air à l'égard des cordons tendineux ne peut être consideré que comme deux poids

* Pag. 407. in 4.

poids égaux ſuſpendus chacun au milieu d'une corde de la longueur des deux muſcles tendineux qui conſtituent les deux levres de la glotte, chaque poids ſuſpendu a ſa corde bien arrêtée à ſes deux extrémitez. Or ces deux poids peſant à plomb ne tendroient nullement à écarter, mais ſeulement & au plus à cambrer & plier chaque corde également, & par conſéquent ſans préjudice de leur contact.

Ainſi l'air pouſſé directement de bas en haut ne tend qu'à ſoulever & ſeulement à proportion de ſon volume, & non à écarter. Il ne peut même ſoulever que fort peu les cordons tendineux, car il n'a de force ſur eux qu'autant qu'ils lui donnent de priſe. Or ils ne lui en peuvent donner qu'à proportion de leur diamétre & de leur longueur, & tout cela eſt fort peu de choſe. Ils ſeront donc ſoulevez, ſi l'on veut, mais ſans préjudice de leur contiguité. La partie charnue & membraneuſe de chaque demi tympan prêtera beaucoup davantage à proportion de ſon étendue & de ſa conſiſtance, & ſoulagera d'autant les deux cordons.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de la réſiſtance immenſe du bandement de ces petits muſcles à l'effort de l'air & de tant de grands muſcles. Ce n'eſt pas par une force extraordinaire, mais par l'application avantageuſe de leur peu de force qu'ils produiſent un ſi grand effet, jointe à la ſimplicité de leur ſtructure & de leur application mutuelle en ſphincter rectiligne, beaucoup plus exact pour la ſuppreſſion de l'air que les ſphincters circulaires. Ceux-ci ſont beaucoup plus aiſez à forcer; car il n'eſt pas poſſible qu'ils ſuppriment l'air, qu'en accourciſſant leur diamétre avec beaucoup d'effort. Or cela ne

ne se peut que * leur circonference ne soit extrémement froncée de plusieurs plis tous fort serrez les uns contre les autres. Ce sont donç autant d'ouvertures en rayon chacune capable d'être forcée dès que l'effort qui les serre diminuera, sans compter qu'il est difficile que le centre méchanique de ces rayons soit réduit à un point indivisible. Et il est impossible au contraire que ces deux lignes parfaitement droites appliquées l'une à l'autre dans toute leur longueur, fassent entr'elles par un contact immédiat autre chose qu'une ligne indivisible. Ces plis froncez sont donc dans les sphincters circulaires plusieurs échappées à garder avec autant d'efforts multipliez à proportion qu'il y a d'échappées, au lieu qu'un sphincter rectiligne comme celui de la glotte demande d'autant moins d'effort que la seule justesse de l'application suffit pour la suppression totale. Je ne sçai si je me trompe, mais il me semble qu'on pourroit calculer cette différence entre les sphincters rectilignes & les circulaires par la proportion du diamétre à la circonférence, plus au nombre & à l'étendue d'autant de rayons qu'il peut y avoir de plis dans les sphincters circulaires.

* Pag. 408. in 4.

IX. ADDITION.

Considération sur un prétendu fait allegué par Galien *pour preuve de la clôture exacte de la Glotte, dont l'exactitude n'a nul besoin d'être prouvée.*

Galien donne pour preuve de l'exactitude de la suppression de l'air par l'action de ces deux muscles, un fait dont la verité me paroît fort suspecte,

pecte, quoiqu'il ſoit confirmé par pluſieurs Relations modernes de Voyageurs. Le fait prétendu eſt que pluſieurs Eſclaves au deſeſpoir, privez par leur état & par la précaution de leurs maîtres de tout moien de s'échaper & de ſe tuer, ſe ſont aviſez de s'étouffer par la ſeule action de ces muſcles, opiniâtrée juſqu'à cet étrange effet. Voilà ce que *Galien* ſuppoſe, peut-être pour l'avoir ouï dire & l'avoir cru ſans preuve, * & ſans approfondir la verité ou l'impoſſibilité du fait.

* Pag. 409. in 4.

Les raiſons que je crois avoir d'en douter m'ont porté à m'en informer plus particulierement, & j'en ai trouvé l'occaſion par le retour du † Directeur général de la Compagnie du *Senegal*. Il m'a confirmé le fait, & ſur mes difficultez il a fait intervenir dans nôtre converſation un des principaux Commis ‡ chargé du ſoin des Negres vendus, & des embarquemens pour l'*Amerique*. Ce premier Commis a été autrefois Chirurgien.

Celui-ci m'a aſſuré qu'il avoit vû deux faits de cette eſpece. L'un de ces faits fût d'un jeune Negre de 14 ou 15 ans, qu'il fût contraint de faire embarquer les fers aux pieds & aux mains, ſe défiant de lui parcequ'il ne l'avoit jamais pu apprivoiſer, quelque bon traitement qu'il lui eut fait pour le deſabuſer de l'opinion qu'ils ont tous qu'on ne les tranſporte en *Amerique* que pour les y manger. Demi-quart-d'heure après l'embarquement on vint dire au Commis que le jeune Negre étoit mort. L'autre étoit un Negre de 27 ou 28 ans qui mourut de la même maniére, étant aſſis à la vûe de pluſieurs perſonnes qui ne penſoient à rien de ſemblable. Je lui

† M. *Bru*. ‡ M. *Caſtain*.

lui demandai la cause de ces étouffemens volontaires prétendus, il me dit que c'étoit la langue ramenée vers la gorge & appliquée sur le conduit de la respiration. Je soûtins l'impossibilité de cette application, & lui voulois faire soupçonner quelque poison. Il repliqua que ces Negres étoient nuds comme la main, & qu'on les visitoit par tout avant l'embarquement, & sur tout avant le débarquement, parce qu'alors leurs fraieurs redoublent.

Il ne paroît sur le corps de ces miserables aucune marque de violence, ils ne jettent du sang par aucun endroit, on n'a pas eu la curiosité de les ouvrir. On m'a promis de le faire à la premiére occasion, & de m'en envoyer une relation exacte suivant le Mémoire que je dois donner pour cet effet.

J'avoue que j'ignore la cause de ces morts volontaires; mais je crois être assuré que ce n'est l'effet d'aucun mouvement * volontaire, quel qu'il puisse être, soit de la langue, soit des levres de la glotte. Aucun mouvement volontaire, quel qu'opiniâtre qu'il puisse être, ne peut être poussé que jusqu'à perte de connoissance; & dès qu'on en est venu-là, le mouvement machinal de la respiration, tel qu'il s'exerce dans un profond sommeil indépendamment de la volonté, recommence sans attendre l'ordre de la volonté, reprend peu à peu son train ordinaire. De sorte que tout ce que la volonté peut faire en ceci, seroit de suspendre la respiration jusqu'à perte de connoissance, & de donner par-là lieu à des retours alternatifs, qui donnant autant de fois lieu de se repentir d'une extravagance si outrée & si opposée à l'inclination naturelle de se conserver, préviendroient une décision finale dans

* Pag. 410. in 4.

dans tous les corps dont les vaisseaux ne seroient pas pleins à crever. La promptitude de ces morts sans retour ne s'accorde pas avec semblables alternatives. Et d'ailleurs on ne voit pas cet exercice de respiration supprimée, à moins qu'il ne leur arrive sous l'eau quelque accident du dehors ou du dedans qui les empêche de prendre le haut pour reprendre haleine. Je ne puis donc croire cette cause; & comme semblables morts sont rares, puisqu'un Commis appliqué depuis 17 ans au soin de ces Esclaves n'en a que deux éxemples en une si longue suite de tems. J'aime mieux avouer mon ignorance, ou attribuer semblables morts aux cas imprévûs des morts subites par différentes causes, ou à la fraieur d'un homme qui croit n'être embarqué ou ne débarquer que pour être égorgé par un Boucher, & son corps débité par quartiers dès qu'il sera à terre au lieu de sa destination.

Voila les IX Additions que je me suis proposées pour la premiére Partie de ce Supplément au Mémoire sur la Voix. J'espere donner dans la seconde Partie de nouvelles preuves des principes du même Mémoire.

QUE

* QUE LES PLANTES

Contiennent réellement du fer, & que ce métal entre nécessairement dans leur composition naturelle.

* Pag. 411. in 4.

Par M. LEMERY le fils.

† IL y a quelque tems que M. *Geoffroi* fit part à l'Académie d'une découverte fort curieuse qu'il avoit faite sur un grand nombre de cendres de différentes Plantes: Il nous dit qu'il n'en avoit trouvé aucune où il n'y eut des grains capables d'être attirez par l'aimant. Mon Pere a fait voir depuis à la Compagnie que dans les cendres mêmes restées dans la cornue après la distillation du miel, on trouvoit aussi de semblables grains, & j'en ai trouvé jusques dans les cendres du Castoreum.

Quoique ces grains soient aussi facilement attirez par l'aimant que des grains de fer de même volume, n'y a-t-il point lieu de soupçonner que ces grains soient une matiere différente du fer, & néanmoins aussi propre que le fer même à être attirée par l'aimant? Ou si l'on prouve que ces grains ne peuvent être autre chose qu'un fer véritable, ou une matiere de même nature que celle de l'aimant, cette matiere n'a-t-elle point été formée pendant que la plante a été brulée & réduite en cendres? ou n'étoit-elle point déja dans la plante? & n'y est-elle

† 13. Novembre 1706.

elle point montée avec les sucs qui ont servi à nourrir & à faire vegeter la plante pendant qu'elle étoit sur la terre? Voilà, à mon avis, les doutes les plus raisonnables qu'on puisse avoir sur la nature & la formation de cette matiére surprenante. Je vais tâcher de les éclaircir le plus succinctement que je pourrai.

Il me seroit aisé de prouver par plusieurs expériences que la matiere qui se trouve dans les cendres est un véritable * fer ou aimant; mais je m'en tiens à une seule expérience qui me paroît suffisante pour cela. J'ai exposé la matiére en question au verre ardent de Monseigneur le Duc d'*Orleans*: elle s'y est fondue de la même maniére & avec les mêmes circonstances que le fer ou l'aimant, c'est-à-dire en petillant ou étincellant beaucoup, & après la fusion elle s'est réduite en une boule métallique comme fait la limaille de fer, ou la poudre d'aimant exposez au même verre ardent.

* Pag. 412. in 4.

Puis donc que cette matiére est un véritable fer ou aimant; par quel hazard s'est-elle rencontrée dans les cendres? & que croire de sa formation? La principale raison qu'on allegue pour proûver que cette matiere a été formée dans le tems que le feu a brulé & calciné la plante, c'est qu'on ne conçoit pas aisément comment des parties aussi grossieres que celles du fer auroient pu monter & se distribuer dans tous les vaisseaux d'une plante, passer jusques dans les tuyaux des fleurs qui doivent être d'une trés-grande subtilité, être recueillies par les abeilles, & se retrouver enfin après la distillation du miel, qui comme tout le monde sçait n'est qu'un composé des parties les plus subtiles des fleurs; mais cette objection dispa-

roîtra peut-être par le raisonnement & les expériences suivantes.

Premiérement le fer est un métal si commun, du moins dans nos païs, que je pose en fait qu'il n'y a point de terre où l'on n'en trouve. En second lieu ce métal se dissout avec la derniere facilité par toutes sortes de sels, & prend différentes formes suivant la nature des sels qui ont servi à le dissoudre. Quand il rencontre dans la terre des acides semblables à ceux de l'esprit de soufre, de l'esprit d'alun & de l'esprit de vitriol, il s'y réduit en un véritable sel concret que nous appellons vitriol. Pourquoi, par éxemple, ce sel dont la base est du fer, comme je l'ai démontré dans un autre Mémoire: ce sel, dis-je, résous dans une quantité suffisante d'eau, ne pourra-t-il pas se distribuer dans toute la plante? Est-ce parceque l'embouchure * de ses tuyaux est fort petite, & qu'on ne croit pas que ce sel soit divisible en d'assez petites parties pour enfiler des routes aussi étroites? On reviendra de ce préjugé si l'on considére qu'un seul grain de vitriol dissous dans neuf mil deux cens seize grains d'eau commune, teint sensiblement de sa couleur toute cette quantité d'eau, & lui donne en même tems un goût assez considérable de fer ou de vitriol; car en ce cas il faut que le fer ait été divisé en des parties bien petites & bien subtiles pour communiquer son goût, & une couleur sensible à un si grand nombre de particules d'eau. Cette divisibilité du fer ou du vitriol me paroît plus que suffisante pour le rendre capable de pénétrer dans les tuyaux des plantes les plus déliez.

* Pag. 413. in 4.

On objectera peut-être que si le fer peut prendre

dre une forme aſſez petite pour paſſer par les filets les plus déliez des racines des plantes, *il* conſerve toujours ſa peſanteur ſpecifique qui le rendra éternellement incapable de s'élever plus avant dans la plante, & de monter juſques dans les fleurs.

Je réponds premiérement que ſi l'on diſſout dans de l'eau commune autant de vitriol qu'elle en peut contenir, & qu'on tire enſuite par un ſiphon cette eau chargée de fer ou de vitriol, elle montera auſſi bien malgré ſon nouveau poids, que ſi elle n'eut point contenu de fer ou de vitriol. Pourquoi donc le fer ne pourra-t-il pas monter de même dans les tuyaux de la plante qui peuvent être regardez comme des eſpeces de ſiphons?

Mais ſi l'on veut encore une nouvelle preuve que la peſanteur ſpecifique du fer ne peut jamais être un obſtacle à ſon élevation dans les plus petits tuyaux des plantes, on n'a qu'à conſidérer que le principe le plus fixe & le plus groſſier, ſçavoir la terre qui comme tout le monde ſçait, réſiſte à une violence de feu très-conſidérable, ne laiſſe pas de s'inſinuer par le cours de la circulation dans le tiſſu même des fleurs; car on en trouve toujours dans leur analyſe: pourquoi donc le fer réduit en ſel par des acides * ne montera-t-il pas dans les fleurs? Et cela d'autant mieux que ce ſel s'éleve & ſe ſublime de lui-même avec la derniere facilité.

* Pag. 414. in 4.

Je prouve la facilité qu'il a à s'élever, 1°. Parceque quand on met dans une même boete du vitriol blanc, du vitriol verd, & du vitriol bleu ſans les couvrir ſéparément, les parties qui s'exhalent naturellement de chacun d'eux, & qui rétombent enſuite confuſément ſur ces vi-

vitriols, changent tellement leur couleur, que le vitriol blanc devient gris blanc, le vitriol verd d'un gris plus foncé, le vitriol d'*Allemagne* qui est bleuâtre devient gris brun & jaunâtre en quelques endroits, & enfin le vitriol de *Chypre* qui est fort bleu devient d'un bleu tirant sur le gris. Il est encore à remarquer que ces vitriols ne changent point de couleur dans leur surface inferieure qui est appliqué contre la boete, mais seulement dans leur surface superieure qui peut recevoir les différentes parties qui s'élevent de tous ces vitriols, & qui retombent ensuite indifféremment sur chacun d'eux.

2°. Si l'on met dans un pot du vitriol & qu'on l'humecte avec un peu d'eau, on verra quelque tems après le fer chargé d'acides monter de lui-même jusqu'au haut des parois du pot, & quelquefois même retomber en dehors & fort bas contre ces mêmes parois. Cette espece de sublimation naturelle du fer prouve assez la facilité qu'il a à s'élever quand il a été pénétré par des acides; mais voici une expérience nouvelle qui la prouve encore infiniment mieux qu'aucune autre.

Quand on verse de l'esprit de nitre sur de la limaille de fer, on sçait qu'il se fait un bouillonnement violent & accompagné d'une chaleur si forte, qu'il n'est presque pas possible de tenir la main sur le vaisseau. Après le bouillonnement la liqueur devient rouge & chargée, à cause du fer qui y a été dissous. J'ai jetté de l'huile de tartre par défaillance sur cette dissolution de fer, il s'est fait une fermentation mediocre, pendant laquelle la liqueur s'est fort gonflée: je l'ai laissé reposer, & peu de tems après il s'est * formé aux parois du vaisseau quantité

* Pag. 415. in 4.

particules assez petites & d'une assez grande legereté pour pouvoir pénétrer les tuyaux les plus petits & les plus élevez des plantes. Concluons donc que le fer qui se trouve dans les cendres des plantes, étoit dans ces mêmes plantes avant qu'elles eussent été brulées; & en effet le fer étant répandu en abondance dans toute sorte de terres, & pouvant être aisément dissous par les prémieres liqueurs salines qui l'arrosent, comme il a déja été dit; ces liqueurs montant ensuite par la chaleur du Soleil dans les tuyaux des plantes pour les nourrir & les faire croître: ces liqueurs, dis-je, portent naturellement avec elles le fer dont elles se sont chargées. Ces raisons une fois conçûes, il y auroit bien plus de lieu d'être surpris si l'on ne trouvoit point de fer dans les plantes, que l'on ne doit être étonné d'en trouver.

*Pag.417. in 4. * On pourroit même dire avec quelque vraisemblance, que non seulement le fer est réellement existant dans les plantes, mais qu'il leur est peut-être encore plus nécessaire qu'on ne pense; car comme ce métal suffisamment attenué par des acides acquiert une force & une volatilité surprenante, qu'il prend avec la derniere facilité la figure de branchages, & qu'il produit un grand nombre de différentes sortes de vegetations; ne pourroit-il pas servir par tout le mouvement & toutes les figures dont il est susceptible, à étendre puissamment & de la maniére la plus convenable les petits tuyaux des plantes où il se rencontre, & contribuer par-là beaucoup à la vegetation de ces mêmes plantes? Enfin comme le fer se peut rencontrer plus ou moins abondamment dans certaines plantes que dans d'autres, & s'unir dans les unes à de certains

sels,

sels, & dans d'autres à des sels d'une autre nature; ce métal contribue peut-être encore beaucoup par-là aux différentes qualitez & vertus médicinales des plantes.

Il ne me reste plus qu'à expliquer pourquoi les plantes dans leur entier ne donnent aucun goût ni aucune marque de fer. C'est que le fer s'y trouve en petite quantité par rapport aux parties huileuses, salines, aqueuses & terreuses qui l'envelopent, & qui le cachent de maniére qu'il n'est plus reconnoissable en cet état. Mais quand la plante a été brulée & réduite en cendres, & que l'on a eu soin de bien laver ces cendres pour en emporter les sels fixes, les grains ferrugineux dégagez alors de leurs envelopes qui empêchoient l'aimant d'y produire aucun effet, reprennent leur prémiere qualité, & sont ensuite facilement attirez par l'aimant, ou par une lame d'acier aimantée; de même que le vitriol poussé par un grand feu se réduit par la perte de ses acides en une matiere qui recommence à pouvoir être attirée par l'aimant, & qui certainement avoit servi de base à la formation du vitriol, comme je l'ai démontré dans un autre Mémoire. On pourroit encore ajoûter que comme le fer qui a servi à faire du vitriol, & qui a été ensuite revivifié par la violence* du feu, a perdu pendant cette operation un assez grand nombre de parties huileuses, pour être devenu sensiblement différent de ce qu'il étoit auparavant par raport aux expériences Chimiques; le fer qui est entré dans la composition des plantes souffre aussi une alteration pareille par la calcination, & devient une matiere plus semblable par sa nature à la matiere propre de l'aimant qu'à celle du fer.

* Pag 41?. in 4.

Je répondrai dans le Tome de 1707 à une objection contre ce Mémoire-ci, qui m'a été faite dans une Assemblée particuliere de l'Académie. Je renvoie cette réponse à un autre Mémoire, parcequ'elle demande plusieurs expériences nouvelles dont le détail la rend un peu longue.

OBSERVATIONS SUR DEUX ENFANS JOINTS ENSEMBLE.

Par M. du Verney l'aîné.

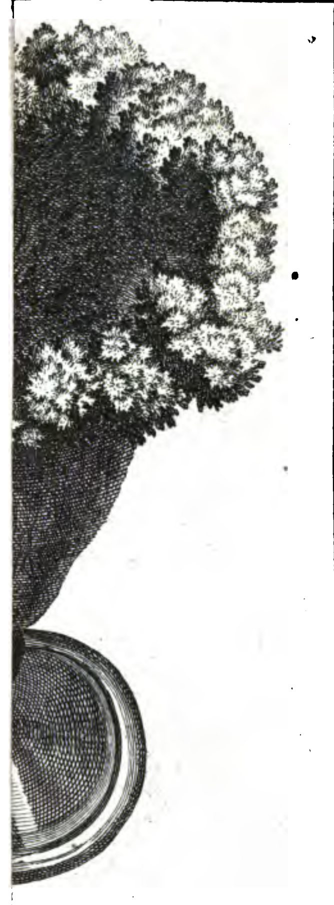
† Le dix-neuviéme du mois de Septembre de l'année 1706, *Catherine Feuillet* femme de *Michel Alibert* Jardinier du Village de *Vitry* près *Paris*, accoucha de deux Enfans mâles joints ensemble par la partie inferieure du ventre. C'étoit sa sixiéme grossesse, & elle entroit dans son neuviéme mois quand elle accoucha.

Il lui est arrivé ce qui est ordinaire à toutes les femmes qui sont grosses de deux Enfans, qui est d'être plus incommodée que dans les autres grossesses, d'avoir le ventre fort gros & fort tendu, & des varices aux jambes.

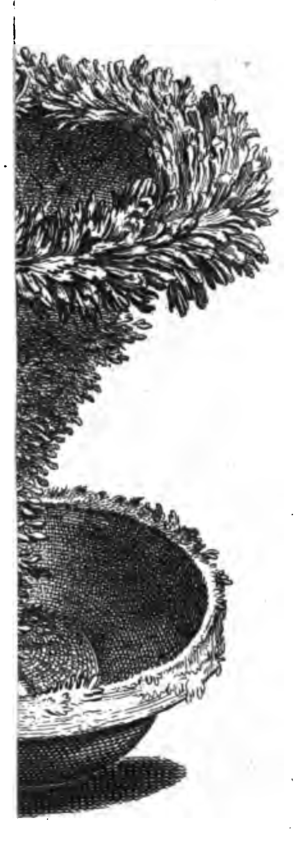
Le travail ne fût ni trop long ni trop penible, parceque l'un de ces Enfans se présenta dans la situation naturelle; & que la Sage-femme, qui dans cette occasion fit connoître * qu'elle est habile dans son art, aiant reconnu par les tentatives qu'elle avoit faites, qu'il y avoit quel-

* Pag 419. in 4.

† 13. Novembre 1706.



ouvert que la Surface interne
u verre.



belle et plus distincte qui s'est
que la premiere et qui a cou=
erre et même une bonne par=
obligé de mettre dessous.

que obstacle qui empêchoit l'Enfant de sortir, & examinant d'où cela pouvoit venir, s'apperçût que sa poitrine étoit embrassée par les jambes d'un second Enfant, qu'elle croioit être separé du premier; ce qui l'obligea de faire de nouvelles tentatives pour tirer celui qui se presentoit au passage: mais ces tentatives furent inutiles; c'est-pourquoi elle résolut sur le champ en tirer dehors les deux pieds du second Enfant, & d'achever son operation, comme si elle n'eût eu à en tirer qu'un seul qui se seroit presenté par les pieds, ce qui réussit fort heureusement.

Le délivre étoit composée d'un seul cordon & d'un seul *placenta*, & ces Jumeaux étoient renfermez sous les mêmes membranes. Le *placenta* étoit plus grand & plus épais qu'à l'ordinaire, les envelopes plus fortes & plus épaisses, & le cordon plus gros.

Ces Enfans étoient fort vifs, ils ont vêcu depuis le 19 Septembre jusqu'au 26, & pendant ce tems-là ils ont fait leurs fonctions naturelles autant que la situation où on les mettoit a pu le permettre.

Celui qui paroissoit le plus fort mourut à quatre heures du matin, & l'autre trois heures après.

On peut penser que trois choses ont contribué à leur mort. La premiére est la mauvaise situation qu'on leur donnoit en les emmaillotant à l'ordinaire, ce qui a comprimé la partie du bas ventre qui leur étoit commune, & les conduits par où les excremens devoient sortir, comme on le prouvera dans la suite.

La seconde, parcequ'ils n'ont jamais tetté, & qu'on ne les a nourris que de lait de Vache lequel s'est caillé dans l'estomac & dans les in-

testins qui en étoient remplis, comme je l'ai reconnu en les ouvrant.

La troisiéme, parcequ'on les découvroit trop souvent, pour satisfaire la curiosité de plusieurs personnes, & qu'à chaque fois on les tournoit en divers sens.

Ces Enfans joints ensemble, comme on les voit dans la * premiere Figure, avoient 22 pouces de long. Il seroit inutile de décrire tout ce qui se présente depuis la tête jusqu'à la partie moienne de leurs ventres, parceque toutes ces parties ont leur conformation ordinaire: mais la partie moienne du ventre, qu'on nomme communément ombilicale, n'avoit point de nombril; & au lieu que ces Jumeaux en devoient avoir chacun un, il n'y en avoit qu'un seul pour tous les deux, dont on marquera la situation.

* Pag. 420. in 4.

Le bas du ventre, qu'on nomme communément l'Hypogastre, est tout ce qu'il y a de singulier.

Dans la conformation naturelle des autres enfans, les os Pubis en se joignant font une espece de cintre, qui termine le bas de la partie anterieure du ventre; & par leur jonction avec les os des Iles & les Ischions qui s'unissent avec l'os sacrum, ils forment tous ensemble la cavité qu'on nomme le bassin.

Dans ces Jumeaux il n'y avoit point de Pubis; mais les os qui eussent dû le composer par leur jonction, étoient separez & placez vers les aînes, l'os pubis droit d'un de ces Jumeaux au lieu de se joindre avec l'os pubis gauche du même sujet, rencontroit l'os pubis gauche de l'autre, auquel il s'unissoit par un ligament très-fort & très-souple, & les deux

fai-

faisoient en cet endroit une espece de cintre.

Ces ligamens qui joignoient les os pubis de chaque côté n'avoient chacun qu'environ 2 lignes de long, & faisoient une espece d'articulation aisée & commode, qui permettoit à ces Enfans d'approcher & d'éloigner réciproquement les troncs de leur corps jusqu'à un certain point.

On voyoit encore un ligament très-fort & très-épais, qui allant d'un côté à l'autre s'implanter dans la partie inferieure de la jonction des os pubis, divisoit en quelque maniére le bassin commun en deux parties. Ce ligament avoit la figure d'un cintre renversé, & la peau qui joignoit les deux derrieres de ces Enfans y étoit étroitement colée. Les os des Iles étoient plus plats qu'à l'ordinaire, tournez en arriere, & posez presque sur le même plan. Les Ischions * étoient aussi tournez en arriere; les os sacrum moins convexes & plus recouverts des os des Iles. Les coccyx plus raccourcis, & leur pointe étoit un peu de côté. * Pag. 421. in 4.

Par cet arrangement les trous qu'on nomme ovales se trouvoient sur les côtez & l'un vis à vis de l'autre, & la boete des hanches étoit fort tournée en arriere; ainsi les cuisses étoient tellement articulées que la pointe des pieds étoit entierement en dehors.

On découvre aisément la conformation & la situation extraordinaire de ces os dans la troisiéme Figure; & il est nécessaire de la consulter: on doit pareillement jetter les jeux sur les autres Figures avant que de lire le reste de la description.

Le nombril commun aux deux Enfans étoit

précisément au milieu de la partie la plus basse du ventre, laquelle leur étoit aussi commune; & en cet endroit le ventre étoit aussi un peu plus étroit, & la peau qui le recouvroit étoit plus ferme, étant fortifiée par plusieurs fibres tendineuses; on y distinguoit même comme une espece de coûture qui marquoit le lieu où la peau des ventres de ces enfans s'unissoit. Cette peau alloit d'un des côtez de la jonction des os pubis jusqu'à l'autre, en faisant une espece de cintre opposé à celui de dessous.

On a déja vû quelques monstres de cette nature. *Paré* dans ses Oeuvres de Chirurgie, donne la figure de deux Jumeaux presque semblables nez à *Paris* en mil cinq cens soixante & dix: mais au lieu que nos deux Enfans étoient tous deux mâles, *Paré* rapporte que les Chirurgiens jugerent que l'un des deux dont il parle étoit mâle, & l'autre femelle; ce que l'on ne peut connoître par la Figure qu'il en a donnée, parce qu'elle les représente seulement couchez sur le dos.

Dans la seconde Figure qui représente les Enfans dont je parle ici, couchez sur le ventre, tout est semblable à ce que l'on voit dans les autres enfans: mais lés os des Iles étant plus serrez contre l'os sacrum, comme il a été dit, font que le derriere de chaque Enfant est plus plat & plus étroit.

* Pag. 422. in 4. * Ces Enfans n'avoient points d'anus, & de l'endroit où il est ordinairement on voyoit sortir les verges, dont l'une étoit tournée d'un côté & l'autre de l'autre.

A chaque côté de ces parties on voyoit un repli de peau qui représentoit assez bien la moitié d'un scrotum vuide & applati.

† Ces

† Ces Enfans étant couchez sur le ventre, les deux verges paroissoient situées d'une maniére bisarre, quoiqu'en effet elles fussent simplement abaissées & tournées vers le croupion.

En faisant la dissection de ce Monstre, la premiére chose qui me parût meriter quelque attention, fût la disposition des muscles droits; car dans l'état naturel ils vont droit du sternum par la partie anterieure du ventre s'inserer aux os pubis: mais dans ces Jumeaux, après être parvenus vers la partie moienne du ventre, ils se détournent vers les côtez pour s'inserer aux os pubis qui sont leur appui naturel & qui y sont placez. Par ce moien il restoit un espace à peu près de la figure d'un lozange qui étoit rempli par les aponevroses des autres muscles du bas ventre. Le nombril étoit placé au milieu de cet espace, le cordon qui en sortoit étoit plus gros qu'à l'ordinaire, & composé d'un plus grand nombre de vaisseaux, ‡ comme nous l'expliquerons dans la suite.

Comme les parties externes étoient semblables à celles des autres enfans depuis la tête jusqu'à la partie basse du ventre, les parties internes l'étoient aussi; le Foye, la Ratte, le Pancreas, l'Estomac & le canal des intestins grêles, tout y étoit semblable aux mêmes parties des autres sujets; mais les intestins grêles de chacun de ces Jumeaux venoient par leurs extrémitez s'ouvrir dans un intestin commun, qui à l'un de ses côtez avoit un petit cœcum garni d'une appendice sans issue; & la rencontre de ces trois intestins se faisoit vers un des côtez où les os pubis se joignoient.

Cet intestin commun doit être regardé comme

† *Voyez la 3. Figure.* ‡ *Voyez la 1. Figure.*

me un Colon, tant par rapport à son diamétre qu'à la forme de son * appendice. Il étoit néanmoins garni de feuillets semblables à ceux des intestins grêles; il étoit un peu évasé à sa naissance, & peu après il faisoit deux plis en se tournant d'abord vers l'os sacrum, puis il venoit s'ouvrir dans un autre intestin qui avoit de chaque côté un cœcum garni de son appendice aveugle. Ce second intestin, qu'on peut nommer un second Colon, faisoit d'abord un long repli en allant sous les intestins grêles de l'un de ces deux Enfans; puis revenant, il faisoit un autre repli, mais plus petit, sous les intestins grêles de l'autre enfant, & enfin il alloit s'inserer dans une espece de sac commun à ces Jumeaux. Ce dernier colon qui étoit sans cellules & sans feuillets, avoit un pouce de diamétre sur neuf de long; & le premier colon qui paroissoit y être enté, avoit un pouce de diamétre sur six de long.

* Pag. 423. in 4.

Les intestins grêles avoient dans chaque Enfant leur mezentere & leurs vaisseaux particuliers; mais le colon étoit attaché de chaque côté dans toute sa longueur par un prolongement du mezentere de chacun de ces Jumeaux: ainsi les vaisseaux dont il étoit arrosé étoient communs aux deux Enfans, & outre les vaisseaux qu'il recevoit de l'artere qu'on nomme Mezenterique superieure, il en recevoit aussi de la Mezenterique inferieure, & la veine qui en rapportoit le sang se déchargeoit dans la veine cave au-dessous des Emulgentes. On voit par cette description que la jonction de ces Freres étoit fort étroite, puisqu'elle étoit formée non seulement par les parties solides & molles, mais encore par le cours des liqueurs.

Le

Le sac où s'ouvre l'intestin dont on a parlé, paroissoit composé de deux vessies applaties & jointes l'un à l'autre par le côté & sans cloison; de sorte qu'il n'y avoit à proprement parler qu'une cavité. Ces vessies n'étoient pas unies suivant toute leur longueur; car par enhaut il s'en falloit environ trois lignes que la jonction n'allât jusqu'au sommet, qu'on nomme ordinairement le fond, & par embas il y avoit environ un demi-pouce de séparation: dans cet * endroit le ligament qui séparoit les deux bassins supportoit cette vessie qu'on peut nommer jumelle, & la partie de cette double vessie particuliere à chacun de ces Enfans étoit située dans la cavité du bassin qui lui répondoit, & qui étoit propre à cet Enfant; mais elle n'occupoit pas cette cavité toute entiere, parce que quelques contours du colon en occupoient une partie.

* Pag. 424. in 4.

Les Ureteres s'ouvroient presque à l'ordinaire dans chaque vessie, dont la tunique charnue étoit fort épaisse, & composée d'un double plan de fibres qui se croisoient, & dont plusieurs passoient obliquement d'une vessie à l'autre en se croisant.

Il y avoit dans chacun de ces Jumeaux à chaque côté du ligament qui séparoit les deux bassins, deux gros trousseaux de fibres qui alloient s'épanouir sur les côtez de chaque vessie, dont la tunique interieure étoit un peu goderonnée, épaisse, & comme calleuse.

L'extrémité de l'intestin s'appliquoit obliquement sur un des côtez de cette vessie, l'embouchure en étoit fort étroite par rapport à son diamétre, & elle ne se trouvoit qu'à l'un des côtez de l'extrémité de l'intestin, l'autre côté

fai-

faisant une espece de sac aveugle. La plus grande partie de cette ouverture répondoit à l'une des vessies; la plus petite avoit sa direction vers l'autre vessie: de maniére qu'il semble que l'un étoit compensé par l'autre pour distribuer également les matieres dans les deux vessies. Il y avoit aussi sur cette vessie un petit sac aveugle qui communiquoit avec l'embouchure de l'intestin.

Dans les Enfans d'une structure ordinaire la vessie a la figure d'une poire; ce qui fait qu'on y distingue un fond & un col, lequel diminuant insensiblement, s'abouche avec l'urethre: mais l'une & l'autre vessie de ces Jumeaux n'avoit point de col, & l'urethre qui sortoit d'abord de chaque vessie, se courboit sous le ligament qui sépare les deux bassins, à peu près comme il fait sous les os pubis dans la conformation * ordinaire, & il passoit entre les corps caverneux.

* Pag. 425. in 4.

Dans le trajet que l'urethre faisoit depuis sa naissance jusqu'à la verge, il étoit garni de plusieurs muscles.

Outre ceux qui tiennent lieu des accelerateurs, il y en avoit deux paires particulieres dans chaque Enfant.

La premiére prenoit son origine de la partie anterieure du trou ovale, & descendant un peu obliquement s'inseroit à la partie de l'urethre qui regarde le coccyx. La seconde paire sortoit de la partie inferieure du même trou ovale, & remontant & repassant sous la premiére paire s'implantoit dans la partie anterieure de l'urethre. On voit par-là que de chaque côté ces muscles se croisent, & que leur plan représente la machine qu'on appelle Sauterelle, dont un lozange embrasse le conduit de l'urethre.

Du

Du côté où l'inteſtin s'ouvroit dans la veſſie, un des teſticules de chaque Enfant étoit placé dans l'aine, & renfermé dans une poche émanée du peritoine, dont l'entrée n'étoit pas fermée comme elle eſt dans les hommes, mais ouverte comme elle eſt dans les autres animaux.

De l'autre côté, les deux autres teſticules de ces Enfans étoient à nud dans la cavité du ventre, placez à la même hauteur, & attachez au peritoine. Les teſticules, les épidymes, les veſicules ſeminales, & tout ce qui appartient à ces parties avoit ſa conformation naturelle. Mais les vaiſſeaux déferens au lieu de s'ouvrir dans l'urethre, venoient s'inſerer dans chaque côté de cette veſſie un peu au-deſſus de la naiſſance de chaque urethre, & leur embouchure étoit ſimple & ſans caruncule.

Tout ce que les verges avoient de plus ſingulier, étoit que leurs racines étoient un peu plus écartées à cauſe de la ſéparation des os pubis, & qu'au lieu d'être ſuſpendues en devant comme à l'ordinaire, elles étoient abaiſſées & tournées en arriere un peu ſur le côté.

La conſtruction de la veſſie étant bien connue, il ſera plus aiſé de parler de la route des vaiſſeaux qui compoſoient le cordon.

Le cordon du fœtus ordinaire eſt compoſé de deux arteres,* d'une veine & de l'ouraque. Le cordon de ces Jumeaux étoit compoſé d'un ouraque, de deux veines & de trois arteres.

* Pag. 426. in 4.

L'ouraque ſortoit de l'échancrure ſuperieure des deux veſſies : elle ne paroiſſoit point percée, & l'on voyoit clairement qu'elle étoit formée par un prolongement des fibres charnues des mêmes veſſies.

Il n'y avoit rien d'extraordinaire dans la route ni dans la grosseur des deux veines: mais au lieu que le cordon de chaque fœtus a deux arteres, il n'y en avoit que trois pour ces deux Enfans, & elles étoient placées sur le même côté de la double vessie.

Pour rendre raison de la situation & de la route de ces trois arteres, il faut remarquer qu'un côté de la double vessie étoit presque tout occupé par les circonvolutions du colon & par son insertion, & que sur l'autre côté qui étoit libre, ces trois arteres étoient placées l'une au milieu, & les deux autres aux côtez.

L'un de ces Jumeaux avoit deux arteres ombilicales, & l'autre n'en avoit qu'une.

Dans celui qui avoit deux arteres, celle du côté droit faisoit sa route à l'ordinaire: celle du côté gauche ne pouvant se rendre au cordon à cause des obstacles qui s'y trouvoient, descendoit sous cette double vessie; & passant sous la grande séparation dont on a parlé, remontoit par le milieu du côté opposé qui étoit libre jusqu'au cordon.

L'artere ombilicale de l'autre Jumeau étoit posée à son côté gauche; il n'y en avoit point au côté droit, parceque l'intestin & son mezentere occupoit la place où elle eut dû être: mais si cette artere étoit unique, elle étoit en récompense plus grosse que les deux autres prises ensemble, & l'iliaque d'où elle sort étoit double de l'autre iliaque.

POUR comprendre les Usages des parties singulieres qui se rencontroient dans ces Jumeaux, on remarquera que l'os pubis droit de chacun de ces Enfans alloit rencontrer * l'os pubis

* Pag. 427. in 4.

pubis gauche de l'autre. Ces quatre os pubis joints ensemble deux à deux, & unis avec les os des iles, les ischions & les os sacrum, faisoient un bassin commun, ferme, solide, & commode pour renfermer les gros intestins & la vessie qui étoient communs à ces Jumeaux.

Dans les autres hommes les os pubis sont joints par un cartilage d'une consistance ferme, & leur union est si étroite qu'il prestent fort peu.

Dans ces Jumeaux, au lieu d'un cartilage on voioit un ligament fort souple, qui joignoit de chaque côté l'os pubis droit de l'un avec l'os pubis gauche de l'autre; & cette espece d'union leur permettoit d'aprocher ou d'éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre jusqu'à un certain point, comme on pourra voir dans la suite; & afin que ce mouvement fût plus libre, les extrémitez par où ces os se joignoient étoient arrondies.

Si cette conformation ne venoit que de l'union de deux œufs & d'une espece de rencontre fortuite, il faudroit qu'elle eut été fort heureuse; car pour peu que les extrémitez de ces os, qui ont peu de largeur eussent glissé l'une sur l'autre, presque toutes les parties tant solides que molles qui composoient le bassin, auroient été privées de leurs fonctions sans ressource; mais je n'entrerai pas dans ce détail qui meneroit trop loin.

On a observé que les muscles droits étant parvenus vers la partie moyenne du ventre, se détournoient vers les côtez pour aller s'inserer aux os pubis. Dans cette situation ils ne laissoient pas de faire leur fonction, & d'aider à comprimer le milieu de la partie inferieure du

ven-

ventre; parce qu'étant dans chaque Enfant inserez aux os pubis, comme à deux points fixes, ils ne pouvoient se raccourcir que les aponevroses, ausquelles ils sont aussi attachez, ne s'approchassent du plan de leurs appuis autant qu'il étoit possible, & ne comprimassent le bas du ventre de chaque Enfant.

Le foye, la ratte, le pancreas, l'estomac & les intestins grêles avoient leur conformation ordinaire dans ces Jumeaux, * qui étoient par ce moyen pourvûs de tous les organes nécessaires pour digerer les alimens, pour les convertir en chyle, & pour le bien filtrer.

* Pag. 428. in 4.

La structure des intestins merite une considération particuliere.

Les intestins grêles venoient s'ouvrir par leurs extrémitez dans un intestin commun qui leur servoit de colon. Il s'agit maintenant de faire voir la différence qui se rencontroit entre ce colon & celui des autres hommes.

Ce colon ordinaire fait un contour considérable en forme d'arc, attaché aux principaux viscéres du bas ventre; il n'a qu'un mésentere, & il est garni de feuillets & de cellules.

Il n'y avoit qu'un seul colon pour ces Jumeaux; il étoit court, avec un double mésentere, & garni de feuillets seulement dans le tiers de sa longueur, & il n'avoit aucune connexion avec les visceres du bas ventre.

La longue circonvolution des colons, les cellules, & les feuillets ordinaires servent à leur donner une grande capacité pour contenir plus de matieres, pour en retarder le cours, pour les rendre plus épaisses, & pour nous dispenser de la nécessité de les rendre trop souvent. Dans ces enfans le colon étoit fort court, sans cellules,

les, & peu garnis de feuillets; ainsi les matieres y séjournant moins y prenoient moins de consistance; tout cela étoit nécessaire à cause de la petitesse des passages par où elles devoient sortir.

Comme cet intestin étoit fort court dans ces enfans, il étoit aisément renfermé dans la partie du ventre qui leur étoit commune, sans avoir besoin d'être suspendu, ni attaché aussi fortement aux autres visceres que le colon des autres hommes, lequel étant très-long, le poids & la quantité des matieres qu'il contient demandent qu'il soit ainsi soûtenu; mais les matieres ne séjournant pas long-tems dans le colon de ces enfans, il n'étoit pas nécessaire qu'il fût d'une grande capacité ni qu'il y en eut deux.

* On a dit que le colon de ces Jumeaux étoit attachée de chaque côté à un prolongement de leurs mésenteres, & que les vaisseaux de ces mésenteres, par un très-grand nombre de rameaux, venoient se ramifier de chaque côté sur le corps de cet intestin où ils s'abouchoient les uns aux autres. Toutes ces anastomozes établissoient un commerce mutuel du sang entre ces enfans, & les nerfs, par une distribution à peu près semblable, y établissoient pareillement une communication reciproque des esprits.

* Pag. 429. in 4.

De ce que l'on vient de dire, on peut juger aisément que les bonnes & les mauvaises qualitez du sang & des esprits pouvant se communiquer par cette partie, toutes les maladies qui y pouvoient arriver, ou par les liquides dont elle étoit arrosée, ou par les matieres qu'elle renfermoit, auroient été communes à ces deux freres. Ainsi il n'étoit pas possible, que l'un des

deux venant à mourir, l'autre pût vivre que fort peu de tems.

On a fait obſerver que le colon s'ouvroit par ſon extrémité dans une veſſie jumelle; que ſon embouchure étoit fort étroite, mais diſpoſée de maniére, qu'elle diſtribuoit preſqu'également les matieres dans chaque veſſie: Comme il n'y avoit point de ſphincter à l'embouchure de l'inteſtin dans ſa veſſie, on peut dire qu'elle faiſoit dans ces Enfans la fonction des inteſtins *Rectum*. En effet elle ſervoit de receptacle aux excremens, & elle n'en permettoit la ſortie, que quand le ſphincter de l'urethre s'ouvroit: il tenoit donc lieu du ſphincter de l'anus & de celui de la veſſie.

Pluſieurs choſes favoriſoient cette ſortie. La prémiere étoit la conſiſtence des excremens qui étoit fort molle, tant par le peu de ſéjour qu'ils faiſoient dans le colon, que par leur mêlange avec l'urine fournie par les quatre ureteres.

La ſeconde étoit la contraction de chaque veſſie qui étoit beaucoup plus forte que dans les autres enfans; parceque leur tunique muſculeuſe étoit beaucoup plus épaiſſe qu'à l'ordinaire. De plus, l'ouverture du conduit de* l'urethre étant plus large qu'à l'ordinaire & dans la partie la plus baſſe de chaque veſſie, les excremens s'y portoient par leur propre poids. Quoique cette veſſie jumelle n'eut qu'une capacité commune, cependant elle recevoit de chaque côté l'urine par les deux ureteres de chaque enfant, & chacune avoit ſon urethre qui lui ſervoit comme à l'ordinaire de conduit de décharge; ainſi les excremens ſolides & les liquides mêlez enſemble ſortoient par les verges, qui faiſoient la fonction d'anus. Cette veſſie n'avoit ni col, ni proſta-

* Pag. 430. in 4

prostates, ni sphincter; mais les deux paires de muscles, dont l'urethre étoit garnie à sa naissance, & qui ont été décrites, tenoient lieu de sphincter: car comme elles se croisoient & qu'elles embrassoient le devant & le derriere de l'urethre dans un sens opposé, il falloit de nécessité qu'agissant ensemble elles comprimassent ce canal.

Il nous reste à parler de la situation qui paroit avoir du être la plus convenable & la plus commode à ces Jumeaux. Il nous a paru que c'eut été d'être à demi couchez avec quelque appui sous le dos; d'autant que par ce moyen les parties du bas ventre, sur tout celles qui leur étoient communes, pouvoient alors faire librement leurs fonctions. Cette situation jointe aux vestiges qui restent de celle qu'ils avoient dans le sein de la mere avec ce qu'elle nous a dit, nous a fait juger qu'ils y étoient à peu près dans la posture que la figure représente, & qui instruira mieux que ce que nous en pourrions dire.

Quant au marcher, il nous a paru qu'ils pouvoient aller tous deux de côté du même sens; mais on voit qu'il étoit impossible, que l'un allât en avant que l'autre ne reculât en arriere; & qu'ainsi ils auroient marché avec beaucoup de difficulté.

Les canaux déferens s'ouvroient dans la vessie; & comme on n'y appercevoit point de sphincters qui auroient pu empêcher l'écoulement continuel de la semence, ainsi que dans les autres hommes, il y a apparence que ces Jumeaux eussent été steriles, parceque leur semence auroit * été toujors mêlée avec l'urine & les excremens grossiers. * Pag. 431. in 4.

 Ou

On attribue d'ordinaire la production des Monſtres, tantôt au hazard, tantôt à des mouvemens purement naturels mais dereglez, tantôt aux égaremens d'une vertu formatrice aveugle, à ce qu'on dit, même dans ſes ouvrages les plus reglez, & qui cependant agit comme ſi elle avoit de l'intelligence: mais le Monſtre dont nous venons de faire la deſcription, & le rapport de ſa conformation interne à ſa figure exterieure, font bien voir qu'il n'a pu être l'ouvrage du hazard, ou d'une vertu formatrice aveugle, ni l'effet d'un dérangement fortuit des mouvemens naturels.

Depuis les envelopes juſqu'au plus profond des entrailles, tout y eſt d'un deſſein conduit par une intelligence libre dans la fin, toute puiſſante dans l'execution, & toujours ſage & arrangée dans les moiens qu'elle emploie.

Suivant l'ordre commun les hommes & les animaux à quatre pieds ont deux iſſues pour l'évacuation des excremens de la prémiere digeſtion; l'une pour les ſolides, & l'autre pour les liquides: au lieu que dans ce Monſtre l'intelligence dont je parle a voulu produire deux corps humains joints enſemble, qui puſſent être droits, s'aſſeoir, approcher ou éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre juſqu'à un certain point; elle a voulu conduire par un ſeul canal les excremens ſolides juſques dans un receptacle commun où ils ſe mêlaſſent avec les liquides, afin que chacun de ces Jumeaux pût enſuite les rendre ſéparément par la verge. On ne peut ſe diſpenſer de ſuppoſer cette volonté, puiſqu'on en voit ſi clairement l'execution. Je laiſſe aux Theologiens à en chercher les raiſons;

fons ; mais cette volonté étant fuppofée, je dis que l'infpection de ce Monftre fait voir la richeffe de la Méchanique du Créateur, au moins autant que les productions les plus reglées, puifqu'à toutes les preuves que nous en avons, elle ajoûte encore celle-ci d'autant plus * forte & plus convaincante, qu'étant hors des regles communes, elle montre mieux & la liberté & la fecondité de l'Auteur de cette Méchanique fi variée dans ces fortes d'ouvrages ; car il doit paffer pour conftant que dans toutes les efpeces de Monftres qui ont paru, foit qu'ils aient été examinez ou non, il y a toujours eu une ftructure interne auffi extraordinaire que leur figure exterieure a paru différente de celle des autres animaux de la même efpece.

* Pag. 432. in 4.

---

* EXPLICATION DES FIGURES.

* Pag. 516. in 4.

LA premiére Figure repréfente ces Enfans couchez fur le dos.

AA. La partie du bas ventre commune aux deux Enfans.

B. Le nombril.

CC. Une efpece de coûture legere, par laquelle ces Jumeaux paroiffoient jointes enfemble.

La feconde Figure repréfenre une partie de ces Jumeaux vûs par derriere.

AA. Les deux verges qui naiffent de l'endroit où devroit être l'Anus de chaque Enfant.

BBBB. Deux replis de peau qui repréfentent de chaque côté un Scrotum vuide & applati.

La troifiéme Figure repréfente une partie de ces Enfans couchez l'un fur l'autre, pour faire voir la fituation naturelle des Verges, qui au lieu d'être fufpen-

 dues

dues en devant à l'ordinaire, après avoir pris leur naiſſance des os pubis qui ſont dans ces Enfans placez ſur les côtez, viennent s'attacher au ligament qui ſépare les deux baſſins, & qui les ſuſpend en arriere.

A. La Verge de l'Enfant qui eſt deſſous dans ſa ſituation naturelle

BB. Son Scrotum.

*Pag 517. in 4. *C. La Verge de l'Enfant de deſſus, qu'on a relevée avec ſon Scrotum, pour mieux faire voir celle de l'Enfant qui eſt deſſous.

La quatriéme Figure repréſente les os des Baſſins de ces Jumeaux (qui n'en compoſent qu'un) vûs de côté un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignent les os pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

La cinquiéme Figure repréſente les mêmes os vûs de front & un peu en deſſus.

AAAA. Les os des Iles.

BBBB. Les os Iſchions.

CCCC. Les os Pubis.

DD. Les os Sacrum.

EE. Les Coccyx.

FF. Les ligaments qui joignoient les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

GG. Le ligament en forme de cintre renverſé qui ſéparoit les deux baſſins.

H. Ligne ponctuée qui marque l'endroit où étoit la coûture du bas ventre qui faiſoit auſſi un cintre, mais dans un ſens oppoſé.

La ſixiéme Figure repréſente les muſcles du bas ventre découverts.

AAAA. Les Muſcles droits.

BBBB. L'endroit où ils commencent à ſe détourner.

CCCC.

CCCC. Leur insertion dans les os Pubis.

D. Le nombril au milieu de l'espace qui est entre ces Muscles.

E. Les fibres tendineuses, dont la peau étoit fortifiée à l'endroit de la coûture.

La septiéme Figure représente les intestins comme ils * paroissoient en ouvrant le bas ventre. * Pag. 518. in 4.

AAAAAA. Les intestins grêles des deux Jumeaux.

BB. L'endroit où les intestins nommez Ileons viennent s'ouvrir dans un intestin commun.

C. Cet intestin commun qui tient lieu de colon.

DD. Deux replis de cet intestin.

E. Un des Cœcum du second intestin commun, dont la naissance n'a pu être marquée dans cette Figure.

F. L'appendice de ce Cœcum.

GH. Une partie de cet intestin qui va sous les intestins grêles de l'un & de l'autre de ces Jumeaux.

I. La Vessie.

LLL. Les trois Arteres ombilicales.

M. L'Ouraque.

NN. Les deux Veines ombilicales.

O. Le Cordon.

La huitiéme Figure représente les gros intestins & la Vessie.

AA. L'extrémité de chaque Enfant.

B. Le gros intestin commun aux deux Enfans, dans lequel les deux Ileons s'ouvrent, & qui est garni de feuillets en dedans.

C. Le Cœcum de cet intestin.

D. Son appendice vermiforme.

EF. Deux replis de cet intestin.

G. L'endroit où cet intestin s'ouvre dans un autre intestin qui n'a point de feuillets.

H. Le premier Cœcum de cet intestin, dont le second ne paroît pas, & sera représenté ci-après.

I. L'appendice vermiforme de ce Cœcum.

L. Le premier repli de cet intestin passant sous les intestins grêles de l'un des Jumeaux.

M. Le second repli passant sous les intestins grêles de l'autre Jumeau.

N, La portion de cet intestin qui paroît une espece de Rectum.

O. Son embouchure dans la Vessie.

* Pag. 519. in 4. * *P.* La Vessie.

QQQQ. Les Vaisseaux du cordon.

RRR. Est la membrane parsémée de Vaisseaux, qui est un prolongement du Mezentere de l'un des Enfans, & qui est attachée à l'un des côtez de l'intestin commun.

SSS. Est une membrane semblable appartenant à l'autre Jumeau, & qui sert pareillement de Mesocolon.

TTTT. La Veine mezenterique superieure.

VVVV. La Veine mezenterique inférieure.

On n'a point fait représenter les Arteres pour ne pas trop charger la Figure.

La Figure neuvieme représente une portion des gros intestins.

A. Est l'extrémité du premier gros intestin qui est commun.

B. Son insertion dans un autre gros intestin.

CC Les deux Cœcums.

DD. Leurs Appendices.

E. Le corps de cet intestin.

La Figure dixiéme représente la Vessie, les Reins, les Ureteres, les Testicules, & leurs Vaisseaux.

A. La Vessie double ou jumelle.

B. L'embouchure du gros intestin dans cette Vessie.

CCCC. Sont les reins de chaque Jumeau.

DDDD. Les Arteres & Veines emulgentes coupées.

EEEE. Les quatre Ureteres de ces deux Jumeaux.

FFFF. Leurs insertions dans les deux côtez de cette Vessie jumelle.

GG. Deux des Testicules, dont l'un appartenoit à l'un des Jumeaux, & l'autre à l'autre, & qui étoient enfermez dans la region de l'aîne.

HH. Les

HH. Les deux autres Testicules de ces deux Enfans qui étoient à nud dans la cavité du ventre.

IIII. Les Vaisseaux déferents de ces quatre Testicules, dont chaque paire vient s'ouvrir dans un des côtez de la Vessie particuliere à chaque Enfant.

LLLL. Les Vesicules seminales.

*La Figure onziéme représente la Vessie ouverte par l'un des côtez. *Pag. 520. in 4.

A. Un des côtez de la Vessie dans son état naturel.

BB. Les Ureteres.

CC. Les Vaisseaux déferents.

DD. Les Vesicules seminales.

E. La naissance de l'Urethre.

F. La Vessie ouverte de l'autre côté.

GG. Les ouvertures des Ureteres dans l'un des côtez de la vessie.

HH. Les ouvertures des Canaux déferents.

I. L'embouchure de l'Urethre.

Dans toutes les Figures précédentes les parties sont représentées de telle maniére que le bas de la Vessie est en haut; mais dans les Figures suivantes les parties sont dans un autre point de vûe, & représentées de maniére que la Vessie s'y trouve dans la situation naturelle.

La douziéme Figure représente les deux plans des Fibres charnues d'un des côtez de la Vessie, dont une partie des longitudinales tire son origine du ligament qui sépare les deux bassins, & qui sont marquées *AA.*

La treiziéme Figure est encore celle de la Vessie; elle fait voir l'insertion de l'intestin commun dans la Vessie jumelle avec une espece de sac aveugle, & la naissance & le progrès des Uretheres.

A. L'embouchure de l'intestin commun dans la Vessie.

B. Le sac aveugle.

CC. L'origine de chaque Urethre.

DD. L'endroit où elle se recourbe sous le ligament qui sépare les deux bassins.

 EE. Leurs

EE. Leurs extrémitez.

Les autres parties ont été expliquées dans les Figures précédentes.

La quatorziéme Figure représente les Muscles particuliers de l'Urethre de ces Enfans.

A. L'Urethre vûe par sa partie anterieure.

BB. Lignes ponctuées qui représentent les trous ovalaires* des os innominez d'un des Jumeaux.

* Pag. 521. n. 4.

CC. La premiére paire de ces Muscles qui s'implantent dans la partie de l'Urethre qui regarde le Coccyx.

DD. La seconde paire de ces Muscles qui s'implante à la partie anterieure de l'Urethre.

La quinziéme Figure représente la Vessie avec les vaisseaux du cordon.

AA. La double Vessie.

BC. Les deux Arteres ombilicales de l'un de ces Jumeaux, dont celle qui est marquée *B* est dans sa situation ordinaire, au lieu que celle qui est marquée *C* passe par dessous la vessie pour se rendre au cordon.

D. L'Artere ombilicale de l'autre Jumeau qui n'en a qu'une, & qui toute seule est aussi grosse que les deux autres ensemble.

E. L'Ouraque.

FF. Les deux Veines ombilicales.

G. Le Nombril.

La seiziéme Figure représente ces Enfans comme on peut présumer qu'ils étoient dans la matrice, & la Figure dix-septiéme les représente dans la situation qui leur auroit été la plus commode après leur naissance. On s'est contenté de représenter seulement par un trait ces deux Figures.

Fig. 1.

C
C
B
A
C

Fig. 2.

A
B B
B B
A

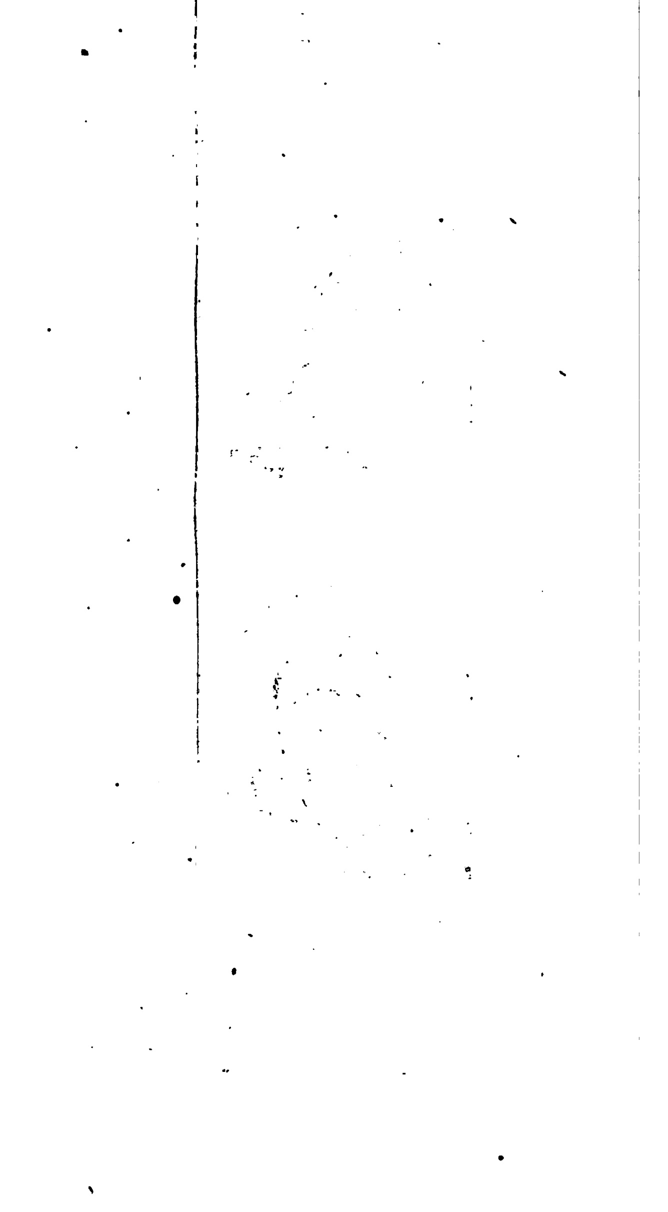
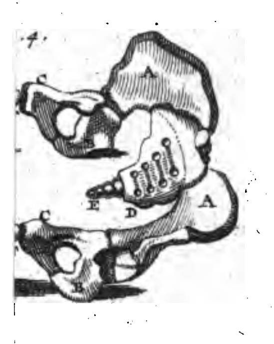
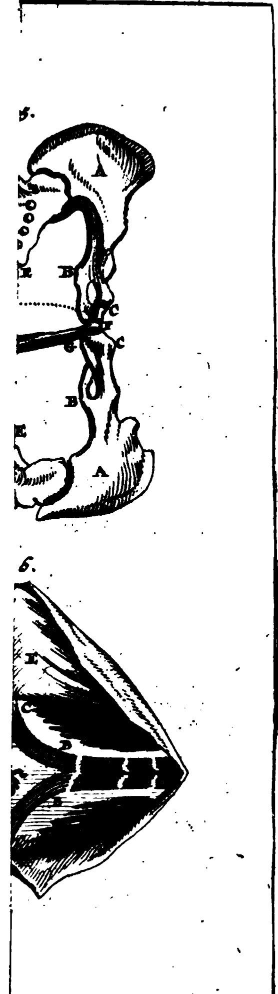


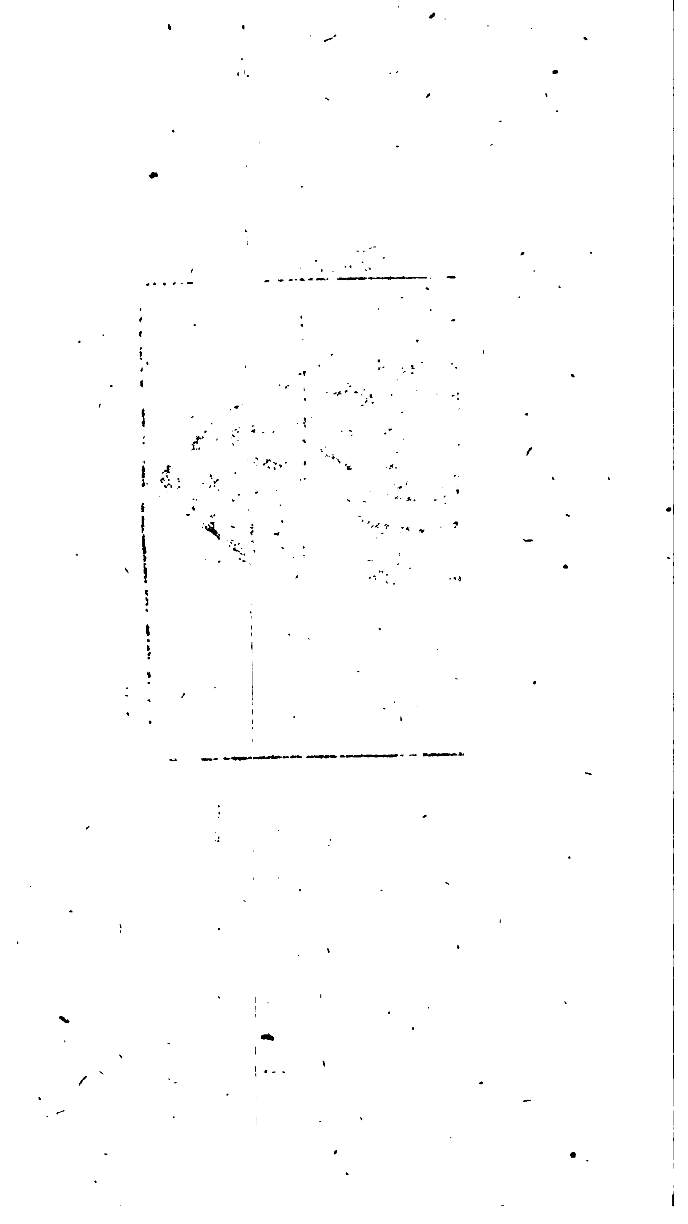
Fig. 3.



Fig. 4.

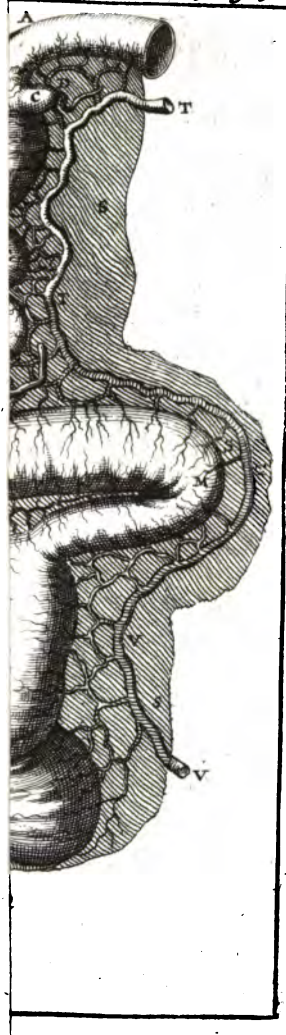



5.
A
B
C
C
B
E
A
6.
E
C
D



Mem. de 1706. Pl. 4. Pag. 562.




A
C
T
S
M
V
V

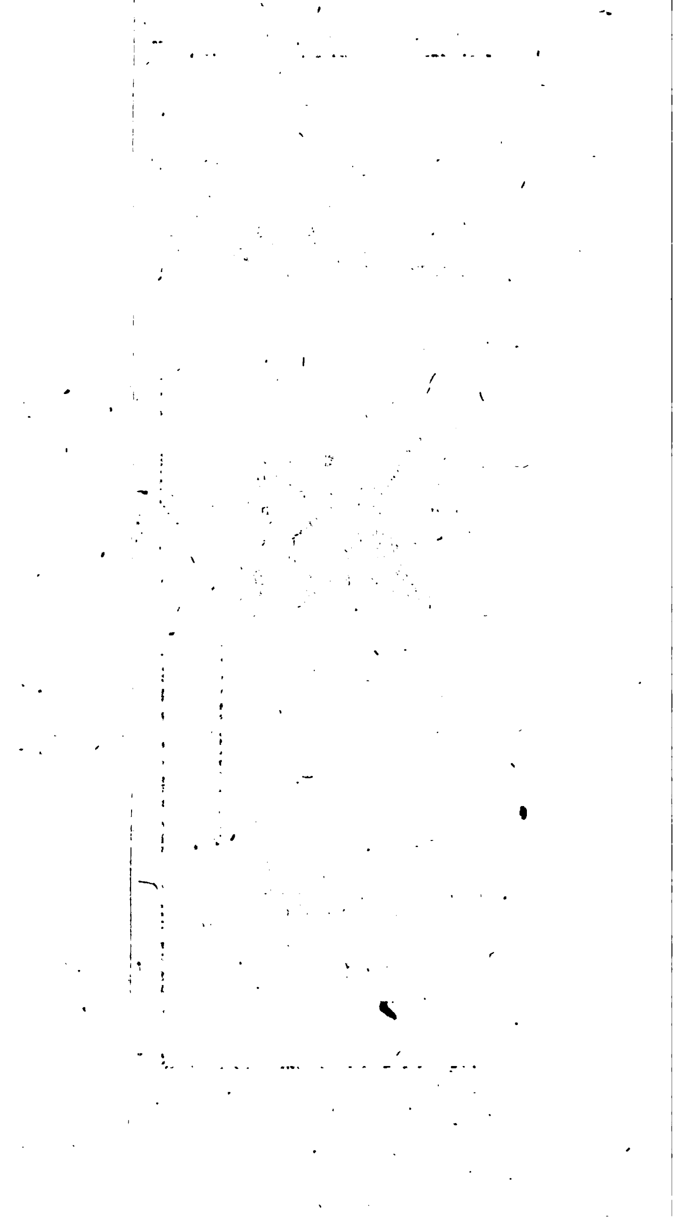


Fig. 9.

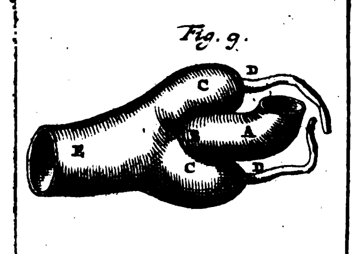


Fig. 11

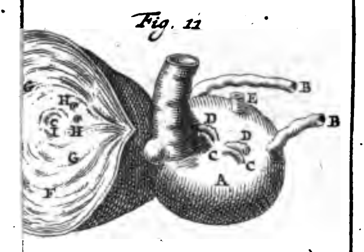


Fig. 13



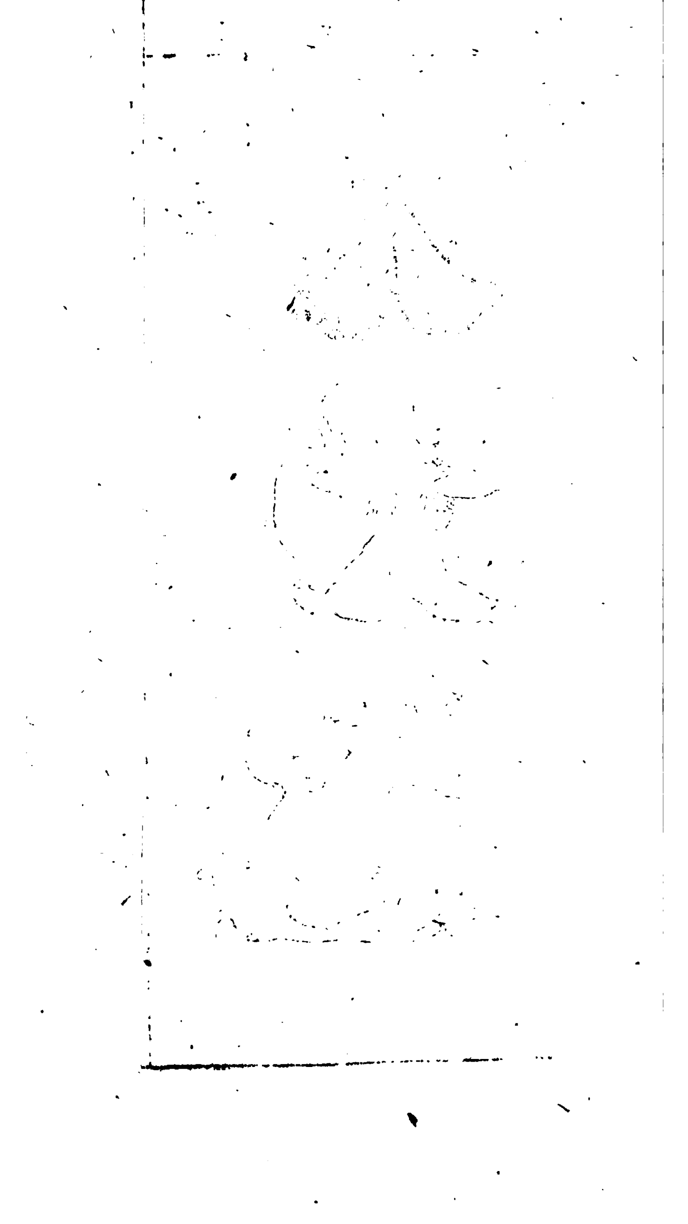


Fig. 15

G
F F
B D
A C A

Fig. 17.

* DISSERTATION

* Pag. 432. in 4.

SUR LES BAROMETRES ET THERMOMETRES.

Par M. DE LA HIRE le fils.

† ON a beaucoup d'obligation aux Philosophes du Siecle passé d'avoir trouvé le moien de déterminer les différens changemens qui arrivent à l'air consideré comme corps à ressort ou comme pesant, & l'on ne pouvoit faire dans la Physique une plus belle découverte ni une plus considérable, puisqu'elle sert à expliquer une infinité de Phénomenes qui avoient jetté les anciens Philosophes dans un grand embarras, dont ils n'avoient pu se tirer qu'en attribuant à la nature une proprieté qu'elle n'avoit pas, & de laquelle cependant ils s'étoient servis pour rendre raison de tout ce qui regardoit cette partie de la Physique, dont tous les Phénomenes devoient être attribuez à la pesanteur & au ressort de l'air.

Le célébre *Galilée*, Mathématicien du Grand Duc, fut le premier qui s'apperçût que l'eau dans le tuyau d'une pompe aspirante ne pouvoit s'y soûtenir qu'à la hauteur * environ de 32 pieds, & que le reste du tuyau, s'il étoit plus haut, demeuroit vuide. La conséquence qu'il tira de cette remarque fut, que la nature n'avoit d'horreur pour le vuide qu'à cette hauteur. C'é-

* Pag. 433. in 4.

† 13. Novembre 1706.

toit, comme l'on voit conclure avec les Anciens, ce qui ne perfectionnoit point la Physique.

Toricelli qui fût son disciple & son successeur fit en 1643. une autre expérience. Il prit un tuyau de verre de 4 pieds ouvert seulement par un bout, & l'aiant empli de mercure, il le renversa dans un autre vaisseau plein aussi de mercure, & s'apperçût que celui qui étoit dans le tuyau descendoit & laissoit enhaut un espace qui devoit être vuide.

En 1644 on écrivit d'*Italie* cette expérience au R. P. *Mersenne* Minime de *Paris*, qui la divulgua par toute la *France*; & M. *Petit* Intendant des Fortifications l'aiant sçûe & l'aiant apprise à M. *Pascal*, ils la firent ensemble à *Rouen* en 1646, & la trouverent conforme à ce qu'on avoit mandé d'*Italie*. Cela donna occasion à M. *Pascal* de faire plusieurs autres expériences, dont il fit un petit Livre qu'il publia en 1647, & qu'il envoya par toute l'*Europe*. Il eut avis cette même année que *Toricelli* avoit soupçonné que c'étoit la pesanteur de l'air qui avoit été cause que le mercure s'étoit soûtenu dans le tuyau quand il avoit fait l'expérience dont nous avons parlé. Cela lui donna occasion de faire encore de nouvelles expériences qui le confirmerent dans la pensée que *Toricelli* avoit eue, & qui lui firent avancer que tout ce qu'on avoit attribué à l'horreur du vuide n'étoit causé que par la pesanteur de l'air. Ce qu'il a parfaitement bien prouvé dans le Livre que nous avons de lui sur cette matiere, & dont tous les Sçavans sont demeurez d'accord. Voilà la suite & les dattes des expériences qui ont été faites pour découvrir cet-

te belle proprieté de la pesanteur de l'air ignorée de tous les Philosophes pendant un si grand tems. Je vais donner présentement la description des Machines qui ont été faites pour découvrir sa vertu élastique, & je commencerai * par la plus ancienne, & j'irai de suite suivant l'ordre des tems.

* Pag. 434. in 4.

Sanctorius qui étoit de *Capo d'Istrie*, Medecin célébre par les Ouvrages qu'il a laissé, s'avisa de faire une Machine appellée Thermometre, pour connoître les différens degrez de chaleur de ceux qui avoient la fiévre, sans faire attention, suivant toutes les apparences, que la même Machine pourroit lui montrer les changemens qui arriveroient à l'air, qui peut augmenter de volume par les différentes chaleurs, & qu'elle seroit fort curieuse, & plus utile au public par la connoissance qu'elle lui donneroit des degrez de la temperature de l'air, que par l'application qu'il en vouloit faire à la Médecine.

Ce Thermometre étoit composé de deux boules de verre attachées à un tuyau de verre recourbé par enbas, & tout proche de la boule inferieure; la boule superieure qui n'avoit point de communication avec l'air exterieur, & une partie du tuyau étoit pleine d'air tel que nous le respirons, & le reste avec une partie de la boule inferieure, qui étoit ouverte par sa partie superieure, étoit rempli d'eau seconde. Il est aisé de voir par cette construction que lorsque l'air de la boule superieure se dilatoit par la chaleur, il comprimoit l'eau seconde qui étoit dans le tuyau & l'obligeoit d'y descendre, & la laissoit remonter quand il se condensoit.

Cette Machine, quoique sujette à quelques ir-

irrégularitez, ne laissa pas d'être trouvée fort curieuse par tous les Sçavans, & d'être mise en usage jusqu'au tems où l'on trouva le Barometre; car alors on s'apperçut d'un très-grand défaut qu'elle avoit, qui étoit d'agir aussi comme Barometre, ce qui pouvoit souvent détruire tout l'effet qu'elle pouvoit avoir comme Thermometre, à cause que l'air de la boule inferieure communiquant avec l'air exterieur agissoit sur la liqueur, & l'obligeoit à monter ou à descendre selon qu'il étoit plus ou moins pesant. Ce fut un malheur pour le Thermometre de *Sanctorius* de ce qu'on découvrit le Barometre: mais il ne dura pas * long-tems; car quelques Sçavans de *Florence* aiant travaillé sur cette matiere, en construisirent un autre qui n'avoit point le défaut du premier. Je n'ai pu sçavoir d'autre datte du tems où il avoit été trouvé, quoique je l'aye cherché avec beaucoup de soin, que dans le Livre de *Guerick* intitulé *Experimenta Magdeburgica*, & imprimé en 1672, où il dit qu'il y a environ 30 ans qu'il a été découvert, & dans les Dissertations Académiques de M. *Petit* imprimées en 1671 où il y en a une description, & où il est marqué que l'invention en est dûe à l'Académie de *Florence* qui en a donné une figure & une description dans le Livre qu'on a d'elle intitulé *Saggi di Naturali Esperienze*.

* Pag. 435. in 4.

Ce Thermometre qu'on doit appeller de *Florence*, & qui est celui qui est le plus en usage présentement, & très-commode pour toutes les expériences qu'on veut faire, pour être transporté, & pour sa construction qui est fort simple; car il n'est composé que d'une boule de verre à laquelle est attaché un tuyau scelé herme-

metiquement par enhaut, dont la grosseur & la longueur sont proportionnées de telle maniére au diamétre de la boule qui est remplie d'esprit de vin avec une partie du tuyau, que dans les plus grandes chaleurs la dilatation de l'esprit de vin ne remplisse pas tout à fait le tuyau, & que dans les plus grands froids sa condensation n'aille pas jusqu'à rentrer dans la boule.

Quoique ce Thermometre eut de trés-grandes commoditez, il ne laissoit pas d'avoir une très-grande incommodité : c'étoit de ne pouvoir faire la comparaison de la temperature de l'air d'un pais avec celle d'un autre, à moins que ce ne fût le même Thermometre qu'on transportât, ou différens divisez sur les mêmes degrez de chaleur : mais M. *Amontons* qui étoit de cette Académie, & un des meilleurs genies de ce Siecle pour la Physique, trouva le moien de le rendre universel sans rien changer à sa construction, en fixant un degré de chaleur auquel on pouvoit rapporter tous les autres, qui est celui de l'eau bouillante, & qui doit être le même par toute la terre suivant * l'expérience de M. *Amontons* ; ensorte qu'il sembloit qu'on ne pouvoit rien souhaiter de plus parfait sur cette matiere. Cependant M. *Nuguét* vient d'en publier un autre cette année, qu'il prétend bien meilleur que tout ce qui a paru jusqu'à présent, comme on le peut voir par le titre qu'il y a mis, que voici :

* Pag. 436. n 4.

Nouvelle découverte d'un Thermometre cherché depuis long-tems par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences, exemt des défauts des autres Thermometres, contenant tous les avantages qui ne se trouvent que séparément & par parties dans ceux dont on s'est servi jusqu'à présent.

Je ne doute point que M. *Nuguet* n'ait crû par ce titre faire beaucoup valoir son Thermometre dans l'esprit du public ; mais il ne devoit pas pour cela y citer l'Académie, n'aiant vû en aucun endroit qu'elle ait jamais cherché un Thermometre tel qu'il le propose, à moins que ce ne soit à cause que M. *Amontons*, environ 12 ans avant que d'être de l'Académie, en avoit voulu faire un qui étoit à peu près semblable à celui qu'il a fait ; mais aiant reconnu qu'il seroit défectueux & bien plus difficile à construire que celui de *Florence*, il l'abandonna. Je ne crois pas que ce que je viens de rapporter soit valable pour autoriser M. *Nuguet* à citer l'Académie qui n'est point garante des fautes que peuvent faire ceux qui en sont, & à plus forte raison de celles qu'ils ont pu faire quand ils n'en étoient pas encore. Passons à l'examen de son Thermometre, & voions s'il répond au titre qu'il porte.

Ce Thermometre est assez semblable au Barometre de M. *Huygens*. Il est composé d'une boule de verre scelée hermetiquement & pleine d'air condensé par le froid de l'eau à la glace, & de 4 tubes cylindriques soudez & joints les uns aux autres, & qui tous ensemble n'en font qu'un seul recourbé dont la courbure est enbas. On emplit ce tuyau comme le Barometre double, avec des précautions cependant dont nous parlerons dans la suite ; ce qui fait que l'espace depuis le haut de ce tuyau jusque vers le milieu du premier tube est vuide d'air grossier, & qu'ensuite * il y a du mercure jusque vers le milieu du troisiéme tube qui est au-dessus de la courbure dans l'autre branche, & au-dessus du mercure il y a de l'esprit de vin jusque vers

* Pag. 437. D 4.

vers

vers le milieu du quatriéme tube au haut duquel est attaché la boule qui est pleine d'air, comme le reste de ce même tube. Il est aisé de voir par cette construction que dans la chaleur l'esprit de vin doit descendre, & remonter dans le froid; parceque l'air de la boule & d'une partie du tuyau se dilatant par la chaleur oblige l'esprit de vin de descendre, & se condensant par le froid laisse la liberté à l'esprit de vin de remonter. Je ne crois pas que cette construction, non plus que la maniére de le remplir, paroisse plus simple que celle du Thermometre de *Florence*. Mais voions surquoi il établit le rapport de ses tubes, d'où dépend toute la construction de son Thermometre.

La proportion qu'il a prise entre le tube où se meut l'esprit de vin & les tubes dans lesquels le mercure se termine de part & d'autre, & entre la pesanteur de l'esprit de vin & celle du mercure, est telle, que quand la liqueur est arrivée au haut du troisiéme tube qui marque les plus grandes chaleurs de l'été, l'air de la boule supporte 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soûtient quand cette même liqueur est parvenue à l'entrée de la boule qui marque les plus grands froids de l'hyver. La raison qu'il rapporte pour prendre cette proportion, est que l'air renfermé acquiert par les plus grandes chaleurs de l'été la force de soûtenir 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soûtient pendant les plus grands froids de l'hyver.

Il y a plusieurs remarques à faire sur ce que je viens de dire qui est tiré de son écrit.

1°. Qu'il ne parle point du diamétre de la boule dans laquelle l'air est enfermé, à quoi cependant il devroit faire attention; car nous avons

avons fait des expériences qui nous ont montré que différens volumes d'air enfermez & exposez à un même degré de chaleur soûtenoient le mercure à différentes hauteurs, ce qui l'obligera à faire ces boules parfaitement égales dans
* Pag. 438. in 4. tous ses Thermometres, & * les tubes égaux ou dans la même proportion, ce qui est presqu'impossible dans l'execution.

2°. Qu'il ne dit pas en quel endroit de la terre la différence des plus grandes chaleurs de l'été aux plus grands froids d'hyver soûtient 4 pouces de mercure, il est probable que c'est à *Paris*, où les termes en ont été connus depuis un certain tems: mais quand on voudra avoir de ces Thermometres dans d'autres pais, il y en faudra faire; ceux qu'il a fait pour *Paris* n'y pouvant pas servir, à cause que les plus grandes chaleurs d'été & les plus grands froids d'hyver, sur lesquels il en établit la construction, changent suivant les pais; ce qui obligera de les connoitre, & ce qui est une grande difficulté.

3°. Qu'il devoit marquer si cet air tel que nous le respirons qui a la force en été de soûtenir 4 pouces de mercure plus qu'en hyver, est enfermé en le comprimant ou condensant; parceque quand on lit l'explication de son Thermometre, il ne paroît pas que cet air soit condensé: cependant celui de la boule de ses Thermometres l'est par le froid de l'eau à la glace. C'est ce qui jette dans une difficulté, à cause que celui sur lequel il établit la construction de ses Thermometres est d'une façon, & que celui qui est dans la boule est d'une autre, & que cependant il paroît conclure l'effet que doit faire celui de la boule par celui que l'autre a produit.

4°. Qu'il

4°. Qu'il aura toujours besoin de glace pour construire ses Thermometres, ce qui est un embarras.

5°. Qu'il doit faire attention, quand il veut faire ses Thermometres, aux différentes hauteurs d'atmosphére qui causent des changemens au corps de l'air.

6°. Qu'il doit prendre garde aux différens degrez de secheresse & d'humidité de l'air qui peuvent produire quelque alteration dans son Thermometre.

Voila bien des précautions qu'on aura de la peine à prendre, & des difficultez bien difficiles à surmonter dans l'execution.

Examinons présentement les précautions que cet Auteur * dit qu'il faut apporter pour remplir son Thermometre. * Pag. 439. in-4.

Avant que de sceler l'extrémité de la boule, il faut avoir soin que l'esprit de vin contenu dans le tube qui est joint à la boule, réponde par sa partie superieure au degré de la graduation du Thermometre ordinaire qui exprime exactement le froid de l'eau à la glace dans laquelle ils sont plongez, & parce qu'il proportionne tellement la quantité de l'eau & la quantité de glace dont il se sert, que le froid qui provient du mélange de ces deux choses, est suffisant pour faire descendre la liqueur du Thermometre ordinaire au 34e degré de sa graduation: il introduit de la liqueur dans ce tube jusqu'à ce que son extrémité superieure réponde à un point qui marque le 33e degré de la graduation de son Thermometre.

Il est évident que par cette maniére de remplir ses Thermometres, il aura toujours besoin de celui de *Florence*, & qu'il ne les rendra pas uni-

universels, puisqu'il n'y aura que ceux qui auront été faits sur un même Thermometre ordinaire qu'on pourra comparer, supposé que dans toutes les autres parties ils puissent être égaux, n'étant pas persuadé que le 33e degré de ceux dont on se sert ordinairement, exprime le même degré de froid, parce que ce 33e degré n'est point déterminé par une même cause par toute la terre comme celui qui est marqué par la chaleur de l'eau bouillante. Ce sont en général les difficultez qui m'ont paru dans la construction du Thermometre de M. *Nuguet*; il ne me reste plus qu'à donner la comparaison que j'en ai faite avec celui de *Florence* dont nous nous servons il y a très-longtems.

Le 25 Juin de cette année 1706 à 2 heures & ½ après midi, le ciel étant serein, j'exposai au soleil dans un lieu où il ne faisoit point de vent, ce dernier Thermometre & celui dont nous nous servons que mon Pere fit faire par M. *Hubin* il y a plus de 30 ans, dont la boule a 1 pouce 11 lignes de diamétre, & le tuyau a 3 pieds 9 pouces de long sur une ligne à peu près de diamétre interieur. *Celui de M. *Nuguet* étant posé bien à plomb, à quoi il faut prendre garde afin qu'il fasse son effet, descendit jusqu'à 93 degrez & demi, & quelques minutes après remonta jusqu'à 89 degrez & demi, & y resta étant toujours exposé au soleil; ce qui fait voir qu'on ne peut pas attribuer cet effet ni à l'air qui auroit pu être rafraîchi pendant l'expérience, parce que ou l'air auroit continué d'être refraîchi, & alors l'esprit de vin auroit dû continuer de monter, ce qu'il ne fit pas; ou l'air ne l'auroit été que pour quelques minutes, & alors les rayons du Soleil l'auroient réchauffé & l'esprit de vin

*Pag. 440. in 4.

vin auroit dû redescendre, ce qu'il ne fit pas non plus; ni à la diminution de l'action des rayons du Soleil causée par sa différence de hauteur sur l'horizon, parce qu'aiant descendu au plus bas en peu de tems, quand il commença à remonter il auroit dû continuer jusqu'à la fin de l'expérience, ce qu'il ne fit pas; il ne faudra donc pas avoir recours à ces raisons-là pour expliquer ce fait, mais à celles que je donne dans la suite. Le nôtre étant à côté, monta jusqu'à 86, & ne s'éleva plus sensiblement; le tems qu'ils y furent exposez fût d'environ 25'; ensuite je les ôtai tous deux, & les mis dans une chambre ouverte à l'Est & où le Soleil ne donnoit point; & après y avoir été assez de tems pour ne plus changer ni l'un ni l'autre, je trouvai que celui de M. *Nuguet* étoit remonté a 78 degrez & demi, & que le nôtre étoit descendu à 64 degrez & demi; & ainsi la différence de l'état où étoit celui de M. *Nuguet* exposé au Soleil à celui de la chambre, étoit de 11 degrez qui valent 3 pouces 3 lignes & demie, & la différence des deux expositions du nôtre étoit de 21 degrez & demi, qui valent 7 pouces 3 lignes & demie: donc le nôtre a été une fois plus sensible que le sien; mais on en pourra faire comme le nôtre qui seront encore beaucoup plus sensibles; car il n'y aura qu'à augmenter le diamétre de la boule, ou mettre un tuyau plus delié qu'il faudra faire assez long afin qu'il ne casse pas pendant les grandes chaleurs.

*Il est à propos d'avertir ici ceux qui ne sçavent pas les regles de Dioptrique, qu'ils ne doivent pas attribuer le grand effet des Thermometres de *Florence* quand ils sont exposez au So- *Pag. 441. in 4.

Soleil, à la figure sphérique de leur phioles, qui ne doit pas plus augmenter l'action de ses rayons sur l'esprit de vin qui y est contenu, que s'il y étoit exposé à nud dans tout autre vaisseau, parce que si par la figure de la courbure de la phiole, les rayons qui y tombent vont en se rassemblant en passant au dedans de la liqueur, & qu'ils échauffent la partie qu'ils touchent par cette réunion plus qu'ils ne feroient s'ils n'étoient rassemblez, aussi ils abandonnent une autre partie de cette liqueur contre laquelle ils ne font aucune action ; ce qui fait que l'un recompense l'autre.

Le Thermometre de M. *Nuguet* n'aura donc pas l'avantage qu'il prétend de parcourir un plus grand espace que celui de *Florence*. De plus le sien doit toujours avoir près de 3 pieds; au lieu qu'on peut faire l'autre aussi petit qu'on veut, & qui aura néanmoins autant de justesse à proportion que les plus grands ; ce qui est fort commode en plusieurs occasions.

Il ne me reste plus qu'à expliquer pourquoi, quand j'eus exposé au Soleil ce nouveau Thermometre, il descendit au plus bas à 93 degrez & demi, & qu'ensuite il remonta à 89 degrez & demi ; c'est parce que la chaleur agissant sur l'air & sur l'esprit de vin en même tems, & l'air étant plus susceptible de dilatation, il fit d'abord descendre l'esprit de vin assez promptement, qui est le seul avantage que je sçache que ce Thermometre ait pardessus les autres : mais ensuite l'esprit de vin s'étant échauffé, il comprima l'air par sa dilatation, & remonta de 4 degrez, ce qui prouve qu'on doit regarder ce nouveau Thermometre comme composé de deux autres, l'un à air comme celui de *Sanctorius*,

rius, & l'autre à esprit de vin comme celui de *Florence*, mais qui agissent l'un contre l'autre. Enfin l'on peut conclure après ce que je viens de rapporter, que le Thermometre de M. *Nuguet* n'a pas tous * les avantages qu'il lui attribue, puisqu'il est beaucoup moins sensible, beaucoup moins exact, beaucoup moins portatif, beaucoup plus difficile à construire, & beaucoup plus composé que l'ordinaire à esprit de vin.

* Pag. 442. in 4.

DES LOIX DU MOUVEMENT.

Par M. CARRE'.

† IL n'y a guéres de questions dans la Physique, qui aient plus exercé les Philosophes & les Mathématiciens du siécle passé, que celles des Loix du Mouvement. En effet ces questions sont des plus curieuses & des plus importantes de cette Science. Je ne parlerai point de tous les Auteurs qui en ont traitté, ni des erreurs où plusieurs sont tombez ; je m'attacherai seulement à démontrer un Régle générale, de laquelle je tirerai par Corollaires, le grand nombre de Propositions, que ces Auteurs ont démontrées d'une maniére très-longue & très-embarassée.

DE'FINITIONS.

1. La *Masse* d'un corps est la quantité de matiere propre qu'il contient dans l'espace qu'il occupe, & cet espace s'appelle *Volume*.

2. La

† 7. Decembre 1706.

2. La *Vitesse* d'un corps est le rapport de l'espace au tems, ou l'espace parcouru divisé par le tems employé à le parcourir.

3. La *Force* d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse.

L'on nommera dans la suite les masses de deux corps qui se choquent, *m*, *n*, & leurs vitesses *v*, *r*.

COROLLAIRES.

Il est évident, 1°. Que si deux corps inégaux se meuvent avec des vitesses égales, leurs forces seront en même * raison que leurs masses ou quantitez de matiere.

* Pag. 443. in 4.

2°. Si ces corps sont égaux, & se meuvent avec des vitesses inégales, leurs forces seront en même raison que leurs vitesses.

3°. Si ces corps sont inégaux en masses & en vitesses, leurs forces seront en raison composée de leurs masses & de leurs vitesses.

4°. Si deux corps inégaux ont des forces égales, leurs vitesses seront réciproquement proportionelles à leurs masses.

L'on suppose dans la suite que les corps sont à ressort, & qu'ils se choquent directement, c'est-à-dire que le centre de pesanteur de chacun de ces corps & leur centre commun de pesanteur se trouvent dans la même ligne; ou bien, si ce sont des globes, que la ligne qui joint le centre de ces corps passe par leur point d'attouchement dans l'instant du choc; ce qui revient au même.

PROPOSITION GE'NE'RALE.

I. Si deux corps à ressort se choquent par des

mou-

mouvemens contraires; je dis que la somme de ces corps est au double de l'un ou de l'autre, comme la somme de leurs vitesses est à une vitesse telle, qu'étant ôtée de la vitesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vitesse de ce même corps après le choc; ou ce qui revient au même, que la vitesse de chacun de ces corps après le choc sera égale à sa vitesse avant le choc moins le produit du double de l'autre par la somme de leurs vitesses divisé par la somme de leurs masses.

Soient deux corps inégaux, m, n, qui se choquent par des mouvemens contraires avec les vitesses, v, r; il faut démontrer que si l'on fait, $m+n. 2n :: v+r. \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$, & $m+n. 2m :: v+r. \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$, ces vitesses étant ôtées de v & de r, les restes $v - \frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$, $r - \frac{2m \times \overline{v+r}}{m+n}$ seront les vitesses que ces corps m & n auront après le choc.

*Pour démontrer cette Proposition, il faut considérer que par le choc ces corps se compriment mutuellement, la réaction étant égale à l'action. Ils s'applatissent même quelque peu dans l'endroit dont ils se choquent. L'expérience le confirme: car si l'on met sur un plan poli & fort dur une legere couche de suif fort mince, & qu'on laisse tomber dessus une balle d'yvoire, de verre ou d'acier d'une sphericité la plus parfaite que faire se pourra, on voit sur ce plan un cercle qui est d'autant plus grand, que la balle est tombée de plus haut, ou qu'elle a été

*Pag. 444. in 4.

été pouſſée avec plus de force: ce qui fait connoître viſiblement que cette balle, qui ne devoit toucher ce plan que dans un très-petit eſpace, s'eſt appliquée ſur un grand nombre de ſes parties en s'applatiſſant. D'où l'on doit conclure que les corps à reſſort qui ſe choquent, s'applatiſſent réciproquement, c'eſt-à-dire que les petites parties dont ils ſont compoſez, cedent & obéiſſent pour ainſi dire les unes après les autres à l'effort du choc, juſqu'à ce que la † force des mouvemens contraires, qui comprime & applatit ces corps, aiant forcé la matiere ſubtile qui fait leur reſſort, d'en abandonner les pores pour un inſtant, faſſe équilibre avec l'effort que cette matiere fait pour y rentrer. Mais dans cet état, il eſt clair que ce qui reſte de force ou de mouvement dans la partie la plus éloignée du point de rencontre, c'eſt-à-dire dans celle qui n'a point été comprimée par le défaut de réſiſtance, ou parceque le choc n'à pas été aſſez grand, doit le diſtribuer également dans le reſte de ſa maſſe, & dans celle du plus foible de la même maniére que dans les corps mous: Donc ce qui reſtera de force dans ces deux corps, que l'on régarde dans cet inſtant comme réunis en un, eſt égale à la différence de leurs momens ou de leurs forces qui eſt $mv - nr$; diviſant donc cette différence par la ſomme des maſſes $m + n$, on aura $\frac{mv - nr}{m + n}$ pour leur viteſſe commune dans cet inſtant du choc: ce qui eſt évident, puiſque dans cet inſtant il ſe perd ou ſe détruit autant de force dans

† *Voyez la ſeconde Partie des Loix du Mouvement du R. P.* Malebranche, Rech. de la Verité *de l'Edition de* 1700.

dans le grand que * dans le petit, & que ces corps allant de compagnie s'ils étoient véritablement mous, la force restante se distribueroit également dans les deux corps que l'on doit regarder comme n'en faisant plus qu'un. Or la force ou le moment d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse, donc il faut diviser cette force restante par la somme des masses, & l'on aura leur vitesse commune.

* Pag. 445. in 4.

Il faut prendre garde que le mouvement du plus fort se fait du même côté devant & après ce premier instant du choc; ainsi sa vitesse est réellement $\frac{mv - nr}{m + n}$: mais pour celle du plus foible, elle doit être $\frac{-mv + nr}{m + n}$, parceque son mouvement tend à se faire du côté opposé après le choc.

Maintenant parceque la compression & l'applatissement de ces corps ne se fait qu'à proportion de la force du plus foible, c'est-à-dire de la résistance que le plus fort trouve dans le plus foible, il est clair que cette impression ne doit augmenter que jusqu'à ce que celui qui a le moins de force, ait acquis une vitesse égale à celle qui reste dans le plus fort, puisqu'alors le plus foible ne lui résiste plus ou n'empêche plus son mouvement: car le ressort des corps qui se choquent; ne se bande que jusqu'à ce qu'ils puissent aller de compagnie; alors leurs pores ne sont plus réciproquement comprimez par l'action du plus fort sur le plus foible: ainsi le ressort commence à se débander par l'action de la matiére subtile qui les pénétre, & qui rentre dans les pores d'où elle a été chassée : Il est donc évident que ces corps, dont je suppose

 que

que le reſſort n'a point été affoibli par le choc, doivent être répouſſez à proportion que cette matiére ſubtile a reçû du mouvement par la compreſſion, laquelle dépend toujours de la viteſſe reſpective des corps qui ſe choquent. Or puiſque ces deux corps s'appuient immédiatement l'un ſur l'autre dans le tems que la matiére ſubtile leur rend le même mouvement qu'elle a reçû de leur compreſſion, il eſt néceſſaire qu'ils ſoient repouſſez l'un & l'autre avec des forces égales, & par conſéquent que ces ſecondes viteſſes * ſoient réciproques à leurs maſſes. Faiſant donc $m+n. n::v+r. \frac{nv+nr}{m+n}$, ce ſera la viteſſe du corps m; puis faiſant $m+n. m::v+r. \frac{mv+mr}{m+n}$, ce ſera la viteſſe du corps n; mais il faut encore prendre garde que ces viteſſes ſont négatives, à cauſe de la réaction de la matiére ſubtile, qui rétablit ces parties comprimées & applaties dans leur état naturel, & par conſéquent repouſſe ces corps du côté oppoſé à leur mouvement avant le choc. Ajoûtant donc les premiéres viteſſes $\frac{mv-nr}{m+n}$, & $\frac{-mv+nr}{m+n}$, puiſqu'elles ne ſont point détruites, avec celles-ci $\frac{-nv-nr}{m+n}$, & $\frac{-mv-mr}{m+n}$; l'on aura enfin pour la viteſſe du corps m après le choc $\frac{mv-nv-2nr}{m+n}$, & $\frac{nr-mr-2mv}{m+n}$ pour celle du corps n: ou ce qui eſt la même choſe $v-\frac{2n\times\overline{v+r}}{m+n}$, & $r-\frac{2m\times\overline{v+r}}{m+n}$. D'où l'on tire

* Pag. 446. in 4.

tire cette Regle générale, que pour avoir la viteſſe de ces corps après le choc, il faut faire: *La ſomme de ces corps eſt au double de l'un ou de l'autre, ainſi la ſomme des viteſſes ou leur viteſſe reſpective, eſt à une viteſſe telle, qu'étant ôtée de la viteſſe de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reſte ſera la viteſſe de ce même corps après le choc.* Ce qu'il falloit démontrer.

Il eſt évident, 1°. que ſi *mv* eſt moindre que *nv* + 2*nr*, & ſi *nr* eſt moindre que *mr* + 2*mv*, les corps *m* & *n* réjailliront: que s'il arrive le contraire, ils ſe mouvront du même côté d'où ils ſont venus; & ſi ces grandeurs ſont égales, ils demeureront en repos. L'on en va donner quelques éxemples en nombres. Mais auparavant il eſt bon d'avertir que les lettres *m* & *n* ne ſervent qu'à deſigner les corps qui ſe choquent; que les chiffres qui ſe trouvent devant marquent le rapport des maſſes, & ceux qui ſont après marquent celui des viteſſes. Ainſi 2 *m* 3 ſignifie qu'un corps a 2 de maſſe, & 3 de viteſſe. Que s'il ne ſe trouve point de chiffre devant la lettre, on y ſous-entend toujours * l'unité; & s'il y a un o après, cela veut dire que le corps eſt en repos.

* Pag. 447. in 4.

I. Exemple.

Que 4*m*6 & 3*n*4 ſe choquent par des mouvemens contraires, on fera par la regle $4+3 . \overline{6: : 6+4} . \frac{6\times6+4}{4+3}=\frac{60}{7}$, laquelle viteſſe étant ôtée de 6, il reſtera $-\frac{18}{7}$, c'eſt-à-dire que *m* réjaillira avec $\frac{18}{7}$ de viteſſe: faiſant de même

$4+3 . 8 :: 6+4 . \frac{8 \times \overline{6+4}}{4+3} = \frac{80}{7}$. Or $4 - \frac{80}{7} = -\frac{52}{7}$; donc *n* réjaillira aussi avec $\frac{52}{7}$ de vitesse. Aussi dans ce cas *mv* est moindre que *nv* + 2*nr*, & *nr* moindre que *mr* + 2*mv*.

II. EXEMPLE.

Que 3*m*12 & 2*n*2 se choquent, on fera 5. 4 :: 14. $\frac{56}{5}$; or $12 - \frac{56}{5} = \frac{4}{5}$; donc *m* continuera de se mouvoir du même côté avec $\frac{4}{5}$ de vitesse; aussi *mv* est plus grande que *nv* + 2*nr*. Pour le corps *n* on trouvera qu'il doit réjaillir avec $\frac{74}{5}$ de vitesse.

III. EXEMPLE.

Que 4*m*4 & 2*n*2 se choquent, on trouvera que le corps *m* après le choc demeurera en repos; car dans ce cas *mv* = *nv* + 2*nr*. Pour le corps *n* il réjaillira avec 6 degrez de vitesse.

II. Il est évident, 2°. Que si un des corps comme *n* est en repos, il n'y a qu'à effacer dans la formule qui marque sa vitesse après le choc, tous les termes où *r* se rencontre; ce qui donnera $\frac{2mv}{m+n}$ pour sa vitesse après le choc, donc pour avoir la vitesse de ce corps, voici la Regle. *La somme des corps est au double du corps choquant; ainsi sa vitesse est à la vitesse du choqué.*

* Pag. 448. in 4. * Pour la vitesse du choquant on la trouvera par

par la formule égale à $\frac{mv-nv}{m+n}$, c'est-à-dire pour avoir cette vitesse, il faut faire : *La somme des corps est à leur différence ; ainsi la vitesse du choquant avant le choc, est à sa vitesse après le choc.* Ce que l'on trouveroit encore par la Régle générale, en ôtant de v cette grandeur $\frac{2nv}{m+n}$.

Il est évident que si mv est plus grand que nv, le choquant continuera de se mouvoir du même côté ; si ce terme est plus petit, le corps réjaillira ; & s'il est égal, il demeurera en repos.

EXEMPLE.

Que $5\,m\,12$ choque $3\,n\,0$, l'on fera par la regle $5+3.\ 10::12.\ \frac{10 \times 12}{5+3} = 15$; donc n se mouvra avec 15 degrez de vitesse. Pour avoir celle de m, on fera $5+3.\ 5-3::12.\ \frac{12 \times \overline{5-3}}{5+3} = 3$, c'est-à-dire que ce corps se mouvra encore après le choc avec 3 degrez de vitesse.

Il est encore évident que si la masse du corps n est plus grande que celle de m, celui-ci réjaillira toujours ; au contraire il continuera de se mouvoir après le choc s'il est plus grand.

III. Si les corps qui se choquent, se meuvent du même côté, l'on fera toujours les mêmes raisonnemens : car s'ils étoient mous, ils iroient de compagnie avec la somme de leurs mouvemens ; donc cette somme étant $mv+nr$, leur vitesse seroit $\frac{mv+nr}{m+n}$. Maintenant distribuant ré-

ciproquement aux masses la différence de leurs vitesses, qui est leur vitesse respective, $v-r$, on aura pour la vitesse de m, $\frac{nv-nr}{m+n}$ qui doit être négative à cause de la réaction de la matiere subtile: & pour celle du corps n, $\frac{mv-mr}{m+r}$ du même côté; & ajoûtant ces vitesses, on trouvera enfin pour la vitesse du corps m après le choc, $\frac{2nr+mv-nv}{m+n} = v + \frac{2n \times \overline{r-v}}{m+n}$; & pour celle de n, $\frac{2mv+nr-mr}{m+n} = r + \frac{2m \times \overline{v-r}}{m+n}$.

* Pag. 449 in 4.

D'où l'on peut tirer cette Regle générale.

La somme des corps qui se choquent par des mouvemens de même part, est au double de l'un ou de l'autre de ces corps, comme la différence de leurs vitesses ou leur vitesse respective, est à une vitesse telle, qu'étant ôtée ou ajoûtée à la vitesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vitesse de ce même corps après le choc. Car $m+n. 2n :: v-r. \frac{2nv-2nr}{m+n}$; & cette vitesse étant ôtée de v, on aura $\frac{2nr+mv-nv}{m+n} = v + \frac{2n \times \overline{r-v}}{m+n}$; faisant de même $m+n. 2m :: v-r. \frac{2mv-2mr}{m+n}$, laquelle étant ajoûtée à la vitesse r, donnera $\frac{2mv+nr-mr}{m+n} = r + \frac{2m \times \overline{v-r}}{m+n}$. Il est facile de voir si le corps qui a le plus de vitesse ou qui attrape l'autre, doit encore se mouvoir après le choc, s'il doit réjaillir, ou s'il doit demeurer en repos.

I. EXEM-

I. EXEMPLE.

Que 8 *m* 12 attrape 4 *n* 4, l'on fera par la regle $8+4. 8::12-4. \frac{8 \times \overline{12-4}}{8+4} = \frac{16}{3}$; or $12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$; donc *m* après le choc continuera de se mouvoir avec $\frac{20}{3}$ de vitesse. De même $8+4. 16::12-4. \frac{16 \times \overline{12-4}}{8+4} = \frac{32}{3}$; mais $4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}$; donc *n* se mouvra avec $\frac{44}{3}$ de vitesse.

II. EXEMPLE.

Que *m* 24 attrape 3 *n* 4, on trouvera par la regle que *m* réjaillira avec 6 degrez de vitesse, & *n* continuera de se mouvoir avec 14.

Ces éxemples sont plus que suffisans pour faire voir l'application de la Regle générale; mais pour en marquer la fécondité, voici un grand nombre de conséquences qu'on en peut tirer, qui sont autant de propositions démontrées par plusieurs Auteurs qui ont traité cette matiere.

* 1. Les corps qui se choquent ont toujours leur vitesse respective égale avant & après le choc. Car par la Regle générale † du choc des corps qui se rencontrent par de mouvemens contraires, on a trouvé après le choc $\frac{mv - nv - 2nr}{m+n}$, & $\frac{nr - mr - 2mv}{m+n}$ pour la vitesse de deux corps qui se choquent; mais ces vitesses étant ajoûtées ensemble donnent $v+r$, qui

* Pag. 450 in 4.

† Art. 1.

qui eſt la viteſſe reſpective avant le choc; donc, &c. Il en eſt ainſi des autres cas.

2. Le centre de peſanteur de deux corps qui ſe ſont choquez, ſe meut toujours avec la même viteſſe avant ou après le choc; & ſi ce centre demeure en repos dans le mouvement qui précede le choc, il demeurera auſſi en repos après le choc. Cela eſt évident par l'article précédent. C'eſt ainſi qu'il faut entendre cette propoſition, que Dieu conſerve toujours dans la nature une égale quantité de mouvement; non une égale quantité de mouvement abſolu, mais une égale quantité de mouvement de même part.

Il y a eu de grands Philoſophes & il y en a encore qui ſoûtiennent que Dieu conſerve toujours une égale quantité abſolue de mouvement dans la nature, parceque tout autre principe leur paroît ne pouvoir s'accorder avec l'immutabilité de Dieu, ni avec les loix générales ſuivant leſquelles il a conſtruit & conſerve ce vaſte Univers: ce qui paroît d'abord très-vrai-ſemblable, & il n'y a guéres que l'expérience qui en puiſſe faire voir la fauſſeté. Mais parceque les expériences que l'on a faites ſur les corps durs à reſſort, ne ſont pas d'accord avec ce principe, puiſque dans une infinité de chocs il y a du mouvement qui ſe perd & d'autre qui ſe rétablit, il a fallu en chercher un autre qui ne s'oppoſat ni à l'immutabilité divine ni aux experiences. Le R. P. *Malebranche* qui a donné des loix du mouvement, & qui avoit ſoûtenu ce ſentiment, examinant cette matiere de plus près, a enfin trouvé le dénouement de ce myſtere, en conſidérant que dans tous les chocs des corps, leur centre commun de peſanteur a tou-

toujours avant & après le choc une * égale vitesse. Voici comme ce grand Philosophe s'explique. *Dans cette Proposition*, Dieu conserve toujours dans l'Univers une égale quantité de mouvement, *il y a une équivoque qui fait qu'elle est vraie en un sens, & fausse en un autre, conforme ou contraire à l'expérience. Elle est vraie en ce sens, que le centre de pesanteur de deux ou plusieurs corps qui se choquent de quelque maniére que ce puisse être, se meut toujours de la même vitesse avant & après le choc. De sorte qu'il est vrai que Dieu conserve toujours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matiere. Par exemple lorsque* m6 *choque* 5m2, *l'expérience apprend qu'après le choc* m6 *réjaillit* m4, *&* 5m0 *avance* 5m2. *Or* 5m0 *ou* m10 *en avant moins* m4, *ou ce qui est la même chose, plus* m4 *en arriere, est égal à* m6, *qui est la quantité de mouvement de même part, ou la même force qui étoit avant le choc. Ainsi cette proposition*, Que Dieu conserve toujours une égale quantité de mouvement, *est vraie en ce sens.*

* Pag. 451. in 4.

Mais cette proposition est fausse & contraire à l'expérience prise en ce sens, que la somme du mouvement de chacun des corps, de quelque manière qu'ils se choquent, soit après le choc égale à celle qu'ils avoient avant le choc, ou que la quantité absolue de mouvement demeure toujours la même. Car dans l'exemple ou l'expérience précédente, avant le choc la quantité de mouvement n'étoit que m6, *celle de* 5m0 *étant nulle: mais après le choc elle devient* m 14, *puisque* 5m2, *ou* m10 *plus* m4 *est égal à* m 14. *Ainsi par le choc la quantité de mouvement prise absolument, c'est-à-dire sans avoir égard aux sens*

contraires dont les corps sont mûs, augmente ou diminue sans cesse.

Comme il en est de même dans une infinité d'autres exemples, l'on doit conclure que la Loi immuable que l'Auteur de la nature suit constamment dans la conservation de ce monde visible, est que dans tous les chocs des corps, il y ait toujours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matiere. Mais les Métaphysiciens ne manqueront pas de demander pourquoi Dieu observe plutôt cette Loi, que celle de conserver toujours une égale quantité absolue de mouvement, *puisque cela s'accorde également bien avec son immutabilité. L'on peut répondre que suivant cette derniere Loi, il n'y auroit pas cet équilibre si nécessaire à la conservation des corps dont ce monde est composé : car comme on ne sçauroit mouvoir un corps que par le choc d'un autre, le choc étant la cause occasionnelle de la communication des mouvemens, il faut toujours dans tous les mouvemens considérer deux ou plusieurs corps, & les rapporter l'un à l'autre, puisqu'ils agissent l'un sur l'autre. Or comme c'est de leur centre commun de pesanteur que doit dépendre l'équilibre, c'est aussi à ce centre auquel il faut avoir égard pour connoitre le résultat de leurs mouvemens. Ainsi il y aura toujours équilibre lorsque ce centre aura avant & après le choc une égale vitesse, ou ce qui revient au même, que Dieu conservera une égale quantité de mouvement de même part. Il faut donc dire que cette Loi *porte beaucoup plus le caractere des attributs divins* (ce sont les paroles du P. Malebranche) *nonobstant la variété infinie des mouve-*

* Pag. 452. in 4.

vemens des corps particuliers. Car le mouvement de tous les corps en général est toujours le même, tout demeure, pour ainsi dire, dans un parfait & immuable équilibre. Il est clair que Dieu agit toujours de la même manière, avec uniformité, une parfaite simplicité, puisqu'il observe sans cesse cette Loi dans les chocs infinis des corps, que leur centre de pesanteur demeure en repos, ou se meuve toujours nonobstant le choc avec la même vitesse; & par conséquent qu'il y ait toujours dans toutes les parties de l'Univers, prises ensemble le même mouvement ou la même force, nonobstant les mouvemens variables des corps particuliers nécessaires pour perfectionner l'Univers, & pour exprimer la sagesse & les autres attributs du Créateur.

3. Si deux corps se choquent de nouveau avec la même vitesse qu'ils ont aquise après le premier choc, ils reprendront par ce nouveau choc la même vitesse qu'ils avoient avant le premier choc. Cela est évident.

4. Dans les corps qui se choquent, il ne se conserve pas toujours la même quantité de mouvement après le * choc, mais elle peut augmenter ou diminuer. Soit un petit corps m choquant un grand $m+x$ en repos avec la vitesse v: on trouvera qu'après le choc la vitesse de $m+x$ sera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle de m sera $-\frac{xv}{2m+x}$; donc la quantité de mouvement après le choc sera $\frac{2mmv+2mxv+mxv}{2m+x}$ $= \frac{2mmv+3mxv}{2m+x} = mv + xv = \frac{xxv}{2m+x}$;

* Pag. 453. in 4.

mais avant le choc elle étoit mv; donc elle est plus grande après le choc, parceque $\frac{xxv}{2m+x}$ est plus petite que xv.

Que si maintenant l'on faisoit choquer ces mêmes corps avec les vitesses résultantes du premier choc, sçavoir $m+x$ avec $\frac{2mv}{2m+x}$, & m avec $\frac{xv}{2m+x}$; comme † ces corps reprendroient les mêmes vitesses qu'ils avoient avant le premier choc, il est clair que la quantité du mouvement seroit diminuée.

5. Si deux corps égaux se choquent avec des vitesses égales ou inégales, ils feront échange de leurs vitesses après le choc, & réjailliront.

6. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvemens contraires, & que leurs vitesses soient en raison inverse de leurs masses; ils réjailliront après le choc avec la même vitesse qu'ils avoient avant le choc.

7. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvemens contraires, & qu'après le choc ils aillent tous deux du même côté, ou que l'un demeure en repos, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc, sera égale à la différence de celles qu'ils avoient avant le choc.

Exemple 1. Que $4\,m\,12$, & $2\,n\,4$ se choquent, on trouvera par la regle que le premier continuera de se mouvoir après le choc avec $\frac{4}{3}$ de vitesse, & que le second réjaillira avec $\frac{52}{3}$.

Or $\frac{16}{3} + \frac{104}{3} = 40$ qui est la différence des quantitez de mouvement avant le choc; donc, &c.

* *Exemple* 2. Si les corps qui se choquent sont 4*m*8 & 2*n*4, le premier deviendra 4*m*o; & le second —2*n*12, c'est-à-dire que l'un demeurera en repos, & l'autre réjaillira avec 12 degrez de vitesse: or $32 - 8 = 24$; donc, &c. * Pag. 454. in 4.

8. Que si les corps réjaillissent tous deux après le choc, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc sera plus grande que la différence de celles qu'ils avoient avant le choc, & cette nouvelle différence sera égale au double de la quantité de mouvement du corps auquel il en reste le moins. Que 5*m*4 & 3*n*2 se choquent, le premier réjaillira 5*m*$\frac{1}{2}$ & le second 3*n*$\frac{11}{2}$: Or $\frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19$, qui est la quantité du mouvement après le choc, la différence avant le choc étoit 14; donc $19 - 14 = 5$ est double de $\frac{5}{2}$.

9. Si un corps est triple d'un autre, & qu'ils se choquent avec des vitesses égales, le plus grand après le choc demeurera toujours en repos, & le plus petit réjaillira avec une vitesse double de celle qu'il avoit avant le choc. Soient ces deux corps 9*mv* & 3*mv*, on trouvera par la regle que le premier deviendra 9*m*o, & le second —3*m*2*v*.

10. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vitesse qu'un des corps perdra est à celle qu'il perdroit s'il choquoit le même corps en repos, comme la somme des vi-

vitesses est à la vitesse du corps choquant. Soient ces deux corps m & n qui se choquent d'abord par des mouvemens contraires avec les vitesses v & r, l'on trouvera par la regle que la vitesse que le corps m perdra sera $\frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$; mais que si n étoit en repos, la vitesse que m perdroit feroit $\frac{2n \times v}{m+n}$. Or $\frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$. $\frac{2n \times v}{m+n}$ :: $v+r$. v; donc, &c.

11. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vitesse que le plus fort perd par le choc du plus foible est égale à celle que ce même corps s'il étoit en repos recevroit du plus foible, & qu'il fût choqué avec une *vitesse égale à la somme ou à la vitesse respective de ces corps. Soient ces deux corps m & n qui se choquent avec les vitesses v & r, la vitesse que le corps m perdra sera $\frac{2n \times \overline{v+r}}{m+n}$; si le corps m étoit en repos, & que le corps n le choquât avec la vitesse $v+r$, celle qu'il lui donneroit seroit la même; donc, &c.

* Pag. 455. in 4

12. Si deux corps inégaux se choquent avec des vitesses égales, le plus petit réjaillira toujours. Pour le plus grand, quelquefois il continuera son mouvement, quelquefois il rejaillira, & quelquefois il demeurera en repos; ce qui est évident par la regle générale.

13. Si deux corps se choquent, les produits faits de la grandeur ou des masses de ces corps par les quarrez de leurs vitesses, étant ajoûtez ensemble, feront des sommes égales devant & après le choc. Il n'y a qu'à en faire le calcul pour en être convaincu.

14. Si un corps quelque petit qu'il soit & quelque vitesse qu'il ait, en choque un autre en repos quelque grand qu'il soit, il lui communiquera toujours du mouvement : car par la regle il communiquera toujours quelque vitesse au grand ; à quoi il faut ajoûter que le grand étant en repos, n'a point de force pour resister au mouvement, puisque la force d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse.

15. Si un corps en rencontre un autre égal & en repos, il lui communiquera toute sa vitesse, & il restera en repos.

16. Si un corps en choque un plus petit en repos, il lui donnera toujours une plus grande vitesse que la sienne; mais elle sera toujours moindre que le double de la sienne. Soit le corps $m+x$ choquant avec la vitesse v le plus petit m en repos, sa vitesse après le choc sera $\frac{2mv+2xv}{2m+x}=v+\frac{xv}{2m+x}$. Or cette vitesse est plus grande que celle du choquant, mais moindre que $2v$; donc, &c.

17. Si un corps en choque un autre plus petit en repos, * & que la vitesse du choquant soit égale à la somme des masses de ces corps, le petit après le choc aura une vitesse égale au double de la masse du grand, & celle que le grand perdra sera double de la masse du petit. Soit $5m8$ choquant $3m0$, le premier aprés le choc deviendra $5m2$, & le choqué deviendra $3m10$; donc, &c.

* Pag. 456. in 4.

18. Que si c'est le petit corps qui rencontre le plus grand en repos, & que la vitesse du petit soit égale à la somme des masses des deux corps, le grand après le choc aura une vitesse double de la masse du petit, & par conséquent cel-

celle que le petit perdra sera aussi double de la masse du grand. Ce qui est évident.

19. Si un corps en rencontre un autre plus grand que lui en repos, il lui donnera une vitesse moindre que la sienne, & il réjaillira toujours. Que m choque $m+x$ avec la vitesse v, celle qu'il lui communiquera sera $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$, & celle qui lui restera sera toujours négative, donc, &c.

20. La vitesse qu'un grand corps donneroit à un petit corps en repos, est à celle que ce petit corps donneroit au grand s'il étoit en repos, les vitesses des choquans étant égales, en même raison que la masse du grand est à la masse du petit. Car soit mv choquant no, la vitesse de no sera $\frac{2mv}{m+n}$. Que si nv choque mo, sa vitesse sera $\frac{2nv}{m+n}$. Or ces vitesses sont comme m à n; donc, &c.

21. Si un même corps en choque un autre en repos avec deux vitesses inégales, les vitesses que le corps choqué acquerera seront en même raison que celle du corps choquant. Ce qui est évident.

22. Si un même corps choque l'un après l'autre deux corps inégaux en repos avec les vitesses égales, les vitesses que ces corps recevront seront réciproquement proportionelles à la somme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient ces trois corps m, n, p, dont les deux derniers sont en repos, & que v exprime la vitesse de m, la vitesse du corps n après le

le choc sera $\frac{2mv}{m+n}$, celle du * corps p sera $\frac{2mv}{m+p}$. * Pag. 457. in 4.
Or ces vitesses sont comme $m+p$ à $m+n$; donc, &c.

23. Si un corps en choque deux autres inégaux & en repos, & qu'il leur communique des vitesses égales, les vitesses du choquant doivent être entr'elles comme la somme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient encore ces trois corps m, n, p. On aura (en supposant les vitesses du choquant x & y) pour la vitesse du corps n, $\frac{2mx}{m+n}$, & pour celle de p, $\frac{2my}{m+p}$. Or par la supposition ces deux vitesses doivent être égales, donc $\frac{2mx}{m+n} = \frac{2my}{m+p}$, donc $x.y::m+n.m+p$; donc, &c.

24. Si deux corps inégaux en frapent un autre en repos avec la même vitesse, les vitesses qu'ils lui communiqueront seront en raison composée de la raison des corps choquans, & de la raison réciproque de ces mêmes corps plus le corps choqué. Que m & n choquent p en repos avec la vitesse v, la vitesse de p choqué par m sera $\frac{2mv}{m+p}$, & choqué par n sera $\frac{2nv}{n+p}$. Or $\frac{2mv}{m+p}$. $\frac{2nv}{n+p}::m\times\overline{n+p}.\ n\times\overline{m+p}$; donc, &c.

25. Si un corps en choque un autre en repos, & qu'après le choc ils avancent tous deux du même côté, ou que le choquant demeure en repos, les quantitez de mouvement seront égales avant ou après le choc. Par éxemple, que $5m3$ choque $3n0$, le premier après le choc deviendra $5m\frac{3}{4}$ & le second $3n\frac{15}{4}$; donc les

quan-

quantitez de mouvement sont égales avant & après le choc. Que si $4m4$ choque $4n0$, le premier demeurera en repos, & le second se mouvra avec 4 degrez de vitesse; donc, &c. Mais si le choquant réjaillit, la quantité de mouvement de celui qui s'avance sera plus grande que celle du choquant avant le choc, & la différence sera égale à la quantité de mouvement avant le choc, du corps qui réjaillit. Car que $3m8$ choque $9n0$, la quantité de mouvement est 24; mais * $9n0$ devient $9n4$, & $3m8$ devient $-3m4$. Or $36 - 12 = 24$; donc, &c.

* Pag. 458. in 4.

26. Si plusieurs boules égales sont rangées de suite, & qu'une autre boule égale choque la prémiere, la derniere seule en recevra la vitesse, & les autres demeureront en repos. Que s'il y en a deux qui se meuvent ensemble, & qui en choquent une suite qui se touchent, il n'y aura que les deux dernieres qui acquereront du mouvement, les autres demeureront en repos. Que s'il y en a trois qui se meuvent ensemble, il y en aura trois de celles qui se touchent qui recevront du mouvement, & ainsi de suite. Ce qui est évident par la regle.

27. Si trois corps inégaux m, n, p, sont tels que m soit plus grand que n, & n plus grand que p, & que n & p soient en repos; je dis que le corps p étant mis en mouvement par m par l'entremise du corps n, recevra une plus grande vitesse que s'il étoit choqué immediatement par m.

Aiant nommé le premier corps m & sa vitesse v, on prendra $m-x$ pour le second, & $m-x-y$ pour le troisiéme. Maintenant on fera par la regle $2m-x. 2m :: v.$

$2mv$

$\frac{2mv}{2m-x}$ vitesse de n choqué par m; ensuite $2m - n - y . 2m :: v . \frac{2mv}{2m-x-y}$ vitesse de p choqué aussi par m; enfin $2m - 2n - y . 2m - 2n :: \frac{2mv}{2m-x} . \frac{2mv \times \overline{2m-2x}}{\overline{2m-x} \times \overline{2m-2x-y}}$ qui est la vitesse du corps p choqué par n avec la vitesse qu'il a reçûe du corps m. Et divisant cette grandeur haut & bas par $2m - 2x$, on aura $\frac{2mv}{2m-n-y-\frac{xy}{2m-2x}}$. Or il est visible que cette fraction est plus grande que $\frac{2mv}{2m-n-y}$ qui étoit la vitesse de p choqué immédiatement par m; donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Que si l'on suppose que le corps m qui est le plus grand soit en repos, & que p choquant n, ce corps n avec la vitesse qu'il a reçûe de p aille fraper le corps m; on démontrera de la même maniere que m acquerera plus de vitesse *étant ainsi choqué, que s'il l'étoit immédiatement par p. Il est donc évident qu'un corps en repos reçoit moins de vitesse d'un autre corps plus grand ou plus petit, s'il en est choqué immédiatement, que s'il étoit choqué par l'entremise d'un troisiéme de moienne grandeur.

* Pag. 459. in 4.

28. Si le corps du milieu est moien proportionnel entre les deux autres, je dis que le troisiéme corps acquerera une plus grande vitesse étant choqué par le moien qu'on suppose avoir été frapé par le premier, que s'il étoit choqué de la même maniére par tout autre corps. Car suppôsant encore les trois corps m, n, p, & cher-

cherchant quel raport le corps du milieu n doit avoir aux deux autres, afin que la vitesse de p choqué par m par l'entremise de n, soit la plus grande qu'il est possible; on trouvera par la regle que la vitesse du corps n choqué par m avec la vitesse v sera $\frac{2mv}{m+n}$; que celle de p choqué aussi par m sera $\frac{2mv}{m+p}$; enfin que celle de p choqué par n avec la vitesse que m lui a communiquée sera $\frac{4mnv}{nn+mn+mp+np}$, qui doit être un plus grand. Prenant donc suivant la regle *de la 3. Section de l'Anal. des Infiniment petits*, la différence de cette fraction dans laquelle il n'y a que n de variable, & l'égalant à zero, on en tirera cette égalité $nn = mp$; donc $m . n :: n . p$; donc le corps n doit être moien proportionnel entre m & p, afin que p acquiere la plus grande vitesse possible. *Ce qu'il falloit démontrer.* Ces deux derniers articles avoient déja été donnez par M. *Saurin* dans un *Journal des Sçavans*, en supposant la regle générale lorsqu'un corps est en repos, démontrée par M. *Huygens*.

29. Il est évident que plus on interposera de corps, & plus on augmentera la vitesse du dernier, & que cette vitesse sera toujours la plus grande qu'il est possible, si tous ces corps sont en progression géométrique. Par éxemple, si l'on donne 100 corps disposez par ordre en progression double, & que le mouvement commence par le plus grand, on trouvera après en avoir fait le calcul, que la vitesse du plus petit est à celle qu'avoit le plus grand avant le choc, comme 14760000000 est à 1. Que si c'est le plus petit qui commence à se mouvoir, la quan-

* Pag 460. in 4.

quantité du mouvement ſera augmentée en raiſon de 1 à 4677000000000. C'eſt-là un des paradoxes les plus ſurprenans, dont la découverte eſt dûe à M. *Huygens*.

30. Si deux corps égaux étant mûs du même côté avec des viteſſes inégales, ſe choquent, ils continueront toujours de ſe mouvoir du même côté, mais ils feront échange de leurs viteſſes: ce qui eſt évident par la regle.

31. Si un corps en rencontre un autre plus petit mû du même côté, la viteſſe qu'il acquerera ſera plus grande que celle du grand avant le choc; & celle que le grand conſervera ſera auſſi plus grande que celle du petit avant le choc. Soient ces deux corps $m+x$ & m qui ſe meuvent du même côté avec les viteſſes v & r; on fera par la regle $2m+x. 2m+2x::v-r. \frac{2m+2x \times \overline{v-r}}{2m+x}$, qui eſt la viteſſe que le grand donnera au plus petit. Ajoûtant donc cette viteſſe avec r, on aura pour la viteſſe du petit après le choc $v+\frac{xv-xr}{2m+x}$ qui eſt plus grande que v. Et pour avoir celle du grand, on fera $2m+x. 2m::v-r. \frac{2mv-2mr}{2m+x}$, laquelle étant ôtée de v, donnera pour celle du grand après le choc $r+\frac{xv-xr}{2m+x}$, qui eſt plus grande que r; donc, &c.

32. Que ſi c'eſt le plus petit qui en rencontre un plus grand mû du même côté, la viteſſe que le grand aura après le choc ſera plus petite que celle du petit; mais pour le petit quelquefois il continuera ſon mouvement avec une viteſſe plus

plus petite que celle du grand avant le choc; quelquefois il demeurera en repos, & quelquefois il réjaillira. Cela eſt évident par la regle, & il eſt inutile d'en donner des exemples.

33. Si deux corps ſe choquent en ſe mouvant de même part, la viteſſe que le corps qui en a le moins reçoit de celui qui en a le plus, eſt égale à celle qu'il recevroit s'il étoit en repos, & qu'il fût choqué par le même corps avec une

* Pag. 461. in 4.

* viteſſe égale à la différence des viteſſes de ces deux corps : car ſi ces deux corps ſont m & $m-x$, & leurs viteſſes v & r; on trouvera dans les deux cas que la viteſſe que le plus petit reçoit du plus grand eſt $\frac{2mv-2mr}{2m-x}$.

34. Si deux corps ſe choquent en ſe mouvant de même part, la viteſſe que le plus grand communiquera au plus petit, eſt à celle qu'il lui communiqueroit s'il étoit en repos en même raiſon que la différence des viteſſes eſt à la viteſſe du plus grand avant le choc. Ce qui eſt évident.

35. Si un corps en choque un autre mû du même côté, la ſomme des quantitez de mouvement des deux corps après le choc ſera la même qu'avant le choc, s'ils avancent tous deux, ou ſi celui qui a le plus de viteſſe demeure en repos. Mais ſi celui qui attrape l'autre rejaillit, la quantité de mouvement de l'autre ſera plus grande que celle des deux corps avant le choc, & la différence ſera égale à la quantité de mouvement du corps réjailliſſant.

EXEMPLES.

1. Que 4 m 8 attrape 2 n 4, la quantité de mou-

mouvement eſt 40; mais après le choc $4\,m\,8$ devient $4\,m\,\frac{16}{3}$ & $2\,n\,4$, devient $2\,n\,\frac{28}{3}$; donc, &c.

2. Que $m\,12$ attrape $3\,n\,4$, la quantité de mouvement eſt 24; mais après le choc $m\,12$ devient $m\,0$, & $3\,n\,4$ devient $3\,n\,8$; donc, &c.

3. Enfin que $2\,m\,8$ attrape $10\,n\,2$, la quantité de mouvement ſera 36; mais après le choc $10\,n\,2$ devient $10\,n\,4$, $2\,m\,8$ devient $-\,2\,m\,2$, c'eſt-à-dire qu'il réjaillit avec deux degrez de viteſſe. Or la quantité de mouvement du ſecond eſt 40 qui differe de 36, du nombre 4 qui eſt la quantité de mouvement du premier après le choc; donc, &c.

L'on réſoudra avec la même facilité une infinité d'autres queſtions ou de problêmes, que l'on pourra propoſer ſur cette matiere, & l'on ne s'y eſt peut-être que trop arrêté.

*COMPARAISON

* Pag. 462. in 4.

De diverſes Obſervations de l'Eclipſe du Soleil du 12 Mai 1706 faites en diverſes Villes de l'Europe.

PAR M. CASSINI le Fils.

† APRE'S avoir reçû de divers lieux les Obſervations de cette Eclipſe, nous les avons com-

† 17. Novembre 1706.

comparées à l'Obſervation qui en a été faite à *Paris*, décrite dans la Figure par la méthode que nous pratiquons ordinairement, pour déterminer la différence des meridiens entre *Paris* & les lieux où cette Eclipſe a été obſervée.

Parmi ces Obſervations il y en a pluſieurs qui ont été faites dans la bande de la terre où l'Eclipſe a été totale, comme *Montpellier*, *Arles*, *Marſeille*, *Geneve* & *Zurik*. Dans les autres endroits elle a été plus petite à proportion que ces lieux étoient plus éloignez de cette bande. Comme l'on ne pût pas obſerver le commencement de l'Eclipſe à *Paris*, & qu'on ne l'apperçût qu'à 8^h $25'$ $38''$, auquel tems on jugea qu'il pouvoit y avoir environ 20 ſecondes qu'elle étoit commencée; l'on a ſuppoſé dans la Figure ſon commencement à 8^h $25'$ $20''$.

Nous ne nous ſommes pas contenté de déterminer la différence des meridiens par le commencement & par la fin de l'Eclipſe, dans leſquels il y a ſouvent quelque ambiguité; mais nous avons auſſi éxaminé celle qui réſulte des autres Phaſes dans les endroits où l'on a obſervé la quantité des doigts éclipſez afin d'avoir un plus grand nombre d'obſervations qui concourent à la détermination de la différence des meridiens.

Com-

* *Comparaison de l'Eclipse observée à* Montpellier *par Messieurs de la Societé Royale des Sciences.* *Pag. 463. in 4.

	A *Montpellier.*	A *Paris* par la Figure.	Differences des meridiens entre *Paris* & *Montpellier.*
Commencement à	8h 21′	8h 16′ 10″	4′ 50″
Un doit.	8 25 37	8 21 25	4 12
Deux doits.	8 30 52	8 26 40	4 12
Trois doits.	8 36 11	8 31 45	4 26
Quatre doits.	8 41 11	8 37 0	4 11
Cinq doits.	8 46 10	8 42 15	3 55
Six doits.	8 51 34	8 47 40	3 54
Sept doits.	8 56 55	8 53 15	3 40
Huit doits.	9 2 33	8 58 35	3 58
Neuf doits.	9 8 19	9 4 20	3 59
Dix doits.	9 13 57	9 9 40	4 17
Onze doits.	9 19 52	9 15 20	4 32
Immersion totale.	9 25 55	9 22 0	3 55
Commencement de l'Emersion.	9 30 5	9 24 10	5 55
Onze doits.	9 36 50	9 30 30	6 20
Dix doits.	9 42 36	9 36 25	6 11
Neuf doits.	9 48 13	9 42 10	6 3
Huit doits.	9 54 2	9 48 0	6 2
Sept doits.	9 59 47	9 53 50	5 57
Six doits.	10 5 33	9 59 40	5 53
Cinq doits.	10 11 35	10 5 40	5 55
Quatre doits.	10 17 28	10 11 40	5 48
Trois doits.	10 23 17	10 17 40	5 37

Deux doits.	10h 29′ 26″	10h 23′ 35″	5′ 51″
Un doit.	10 35 25	10 29 20	6 5
Fin de l'Eclipse.	10 40 38	10 35 20	5 18

En prenant une moyenne entre ces differences, l'on aura la difference des meridiens entre *Paris* & *Montpellier* de 5′ 2″.

* Pag. 464. in 4.

* *A* Arles *par M.* Davizard.

	A *Arles*.	A *Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Arles*.
Commencement à	8h 28′ 44″	8h 16′ 0″	12′ 44″
Quatre doits.	8 45 44	8 37 30	8 14
Cinq doits.	8 52 44	8 43 15	9 29
Onze doits.	9 24 44	9 16 0	8 44
Obscuration totale.	9 30 44	9 21 50	8 54
Recouvrement de lumiere.	9 35 44	9 26 10	9 34
Dix doits.	9 45 44	9 37 10	8 34
Neuf doits.	9 51 44	9 43 0	8 44
Huit doits.	9 57 44	9 49 0	8 44
Sept doits.	10 3 44	9 54 50	8 54
Six doits.	10 8 44	10 0 40	8 4
Cinq doits.	10 15 45	10 6 45	9 0
Quatre doits.	10 21 45	10 12 40	9 5
Trois doits.	10 27 45	10 18 45	9 0
Deux doits.	10 33 15	10 24 30	8 45
Un doit & demi.	10 36 30	10 27 45	8 45
Fin de l'Eclipse.	10 45 45	10 36 55	8 50

M. De-

M. *Davizard* nous écrivit qu'il n'avoit pas observé exactement le commencement de l'Eclipse, & qu'il falloit s'en tenir aux Observations suivantes. En prenant une moyenne entre les différences des meridiens qui résultent de cette Observation, l'on aura la différence des meridiens entre *Paris* & *Arles* de 9′ 4″.

A Avignon *dans le College des Jesuites.*

	A *Avignon*.	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Avignon*.
Commencement à	8h 27′ 55″	8h 17′ 25″	10′ 30″
Un doit.	8 32 3	8 22 20	9 43
Deux doits.	8 36 10	8 27 25	8 45
Trois doits.	8 41 18	8 32 40	8 38
Quatre doits.	8 47 12	8 38 0	9 12
Cinq doits.	8 52 46	8 43 55	8 51
* Six doits.	8 58 29	8 49 10	9 19
Sept doits.	9 4 20	8 54 40	9 40
Dix doits.	9 21 56	9 11 15	10 41
Onze doits.	9 26 24	9 16 50	9 34
Eclipse totale.	9 33 47	9 22 50	10 57
Recouvrement de lumiere.	9 36 17	9 26 10	10 7
Onze doits.	9 43 10	9 32 20	10 50
Dix doits.	9 48 55	9 38 5	10 50
Neuf doits.	9 54 50	9 43 50	11 0
Huit doits.	9 59 20	9 49 30	9 50
Sept doits.	10 5 21	9 55 20	10 1
Six doits.	10 11 11	10 1 5	10 6
Cinq doits.	10 18 29	10 7 25	11 4
Quatre doits.	10 24 28	10 13 25	11 3
Trois doits.	10 30 5	10 19 30	10 35

* Pag. 465. in 4.

Deux doits.	10	35	28	10	25	15	10	13
Un doit.	10	41	1	10	31	5	9	56
Fin de l'Eclipse.	10	46	48	10	36	55	9	53

En prenant une moyenne entre les différences qui résultent de cette Observation, l'on aura la différence des meridiens entre *Paris* & *Avignon* de 10′ 3″.

A Marseille *par le Pere* Laval *&* *Mr*. Chazelles.

	A *Marseille.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Marseille.*
Commencement à	8h 28′ 43″	8h 17′ 0″	11′ 43″
Un doit.	8 33 50	8 22 15	11 35
Deux doits.	8 38 39	8 27 10	11 29
Trois doits.	8 44 10	8 32 40	11 30
Quatre doits.	8 49 44	8 38 5	11 39
Cinq doits.	8 54 4	8 43 5	10 59
Six doits.	8 59 54	8 48 50	11 4
Sept doits.	9 5 46	8 54 10	11 36
Huit doits.	9 11 54	8 59 50	12 4
Neuf doits.	9 16 54	9 5 0	11 54
Dix doits.	9 23 4	9 11 0	12 4
Onze doits.	9 28 21	9 16 30	11 51
Eclipse totale.	9 34 40	9 22 30	12 10
* Recouvrement de lumiere.	9h 37′ 40″	9h 26′ 30″	11′ 10″
Onze doits.	9 43 41	9 32 30	11 11
Dix doits.	9 49 14	9 38 0	11 14
Neuf doits.	9 55 30	9 43 50	11 40
Huit doits.	10 0 4	9 49 30	10 34
Sept doits.	10 5 38	9 55 0	10 38
Six doits.	10 12 26	10 1 10	11 16

* Pag. 466. in 4.

Cinq

Cinq doits.	10h 18′ 6″	10h 7′ 5″	11′ 1″
Quatre doits.	10 23 36	10 13 0	10 36
Trois doits.	10 30 35	10 19 20	11 15
Deux doits.	10 36 5	10 25 0	11 5
Un doit.	10 42 35	10 31 0	11 35
Fin de l'Eclipse.	10 47 30	10 36 50	10 40

En prenant une moyenne entre les différences qui résultent de l'Observation de ces Phases, l'on aura la différence des meridiens entre *Paris* & *Marseille* de 11′ 22″.

A Geneve *par Messieurs* Violier *&* Gautier.

	A Geneve.	*A Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Geneve.*
Immersion totale.	9h 45′ 32″	9h 29′	16′ 32″
Recouvrement de la lumiere à	9 48 32	9 31 30	17 2

L'Observation de l'Immersion totale & du recouvrement de lumiere s'accorde à 13 secondes près de celle que M. *Facio* a faite à *Geneve* dans un autre endroit.

A Zurik *par M.* Scleuzer.

	A Zurik.	*A Paris* par la Figure.	Difference des meridiens entre *Paris* & *Zurik.*
Commencement à	8h 54′	8h 26′ 20″	27′ 40″
Le milieu.	9 58	9 33 50	24 10
Fin de l'Eclipse.	11 12	10 47 20	24 40

Il y a apparence qu'il y a quelque erreur dans l'Observation du commencement de l'Eclipse, & qu'il faut s'en tenir à celle de la fin qui s'accorde à quelques secondes près à celle du milieu de l'Eclipse.

* Pag 467. in 4. * Le Soleil fût couvert à *Zurik* pendant quatre minutes, que l'on voyoit les étoiles de la prémiere grandeur & Venus. L'obscurité y fût si grande qu'on ne reconnoissoit pas les gens à quatre pas de distance. Le bord de la Lune paroissoit comme un anneau d'or, & la rosée tomba & mouilla les herbes.

A Strasbourg *par M.* Einsenschmid.

	A Strasbourg.	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Strasbourg.*
Commencement à	8h 49′ 38″	8h 27′ 55″	21′ 43″
Le milieu.	9 58	9 35 30	22 30
Fin de l'Eclipse.	11 9 5	10 48 0	21 5

La grandeur de l'Eclipse fût observée à *Strasbourg* de 11 doits 38 minutes.

A Genes *par M. le Marquis* Salvago.

	A *Genes.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Genes.*
Fin de l'Eclipse.	11h 9′ 23″	10h 43′ 40″	25′ 43″

Les nuages empêcherent d'observer exactement à *Genes* le commencement de l'Eclipse & la plûpart des Phases.

A Mo-

A Modene *par le Pere* Fontana.

	A *Modene.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Modene.*
Commencement à	8h 57′ 0″	8h 22′ 40″	34′ 20″

A Bologne *par Messieurs* Manfredi & Stancari.

	A *Bologne.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Bologne.*
Commencement à	8h 58′ 50″	8h 22′ 50″	36′ 0″
Un doit.	9 4 5	8 28 10	35 55
Deux doits.	9 10 4	8 33 45	36 19
Trois doits.	9 15 14	8 39 10	36 4
*Quatre doits.	9 20 50	8 44 40	36 10
Cinq doits.	9 26 48	8 50 25	36 23
Six doits.	9 32 15	8 56 5	36 10
Sept doits.	9 38 20	9 2 0	36 20
Huit doits.	9 43 42	9 7 40	36 2
Neuf doits.	9 49 40	9 13 30	36 10
Dix doits.	9 55 58	9 19 50	36 8
Onze doits.	10 3 10	9 26 45	36 25
Dix doits.	10 19 26	9 44 45	34 41
Neuf doits.	10 25 29	9 51 5	34 24
Huit doits.	10 32 10	9 57 10	35 0
Sept doits.	10 39 32	10 3 50	35 42
Six doits.	10 44 57	10 9 40	35 17
Cinq doits.	10 51 53	10 15 50	36 3
Quatre doits.	10 58 20	10 22 25	35 55
Trois doits.	11 3 56	10 28 40	35 16
Deux doits.	11 10 36	10 34 50	35 46
Un doit.	11 16 18	10 40 45	35 33
Fin de l'Eclipse.	11 22 30	10 47 0	35 30

*Pag. 468. in 4.

 Cet

Cette Eclipse fût observée à *Bologne* de 11 doits un tiers. Au tems de la plus grande obscuration la lumiere du jour étoit fort pâle, & on pouvoit souffrir sans incommodité à la vûe la lumiere du Soleil. En prenant une moyenne entre ces différences, l'on aura la différence des meridiens entre *Paris* & *Bologne* de 35′ 47″ ½.

A Rome *par M.* Bianchini *aux* Thermes de Diocletien.

	A *Rome*.	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Rome*.
Commencement à	8h 59′ 48″	8h 19′ 25″	40′ 23″
Un doit.	9 6 33	8 25 25	41 8
Six doits.	9 34 0	8 53 45	40 15
Sept doits.	9 41 15	8 59 55	41 20
Huit doits.	9 46 45	9 5 55	40 50
Neuf doits.	9 53 15	9 12 20	40 55
Dix doits.	10 1 15	9 20 5	41 10
* Pag. 469. in 4. *Neuf doits.	10 27 0	9 46 20	40 40
Huit doits.	10 33 30	9 53 0	40 30
Trois doits.	11 7 0	10 25 40	41 20
Deux doits.	11 12 32	10 31 50	40 42
Fin de l'Eclipse.	11 24 5	10 44 25	39 40

Le Soleil étoit éclipsé de dix doits 36 minutes à 10h 9′ 15″. Il se cacha ensuite dans les nuages, mais on jugea que l'Eclipse n'avoit pas augmenté sensiblement. En prenant une moyenne entre ces différences, l'on aura la différence entre *Paris* & *Rome* de 40′ 44″ ½.

A Ma-

A Madrid *dans le College Imperial par le Pere* Cassani *Jesuite.*

	A *Madrid.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Madrid.*
Commencement à	7h 43′ 50″	8h 6′ 45″	22′ 55″
Fin de l'Eclipse.	9 57 34	10 20 0	22 26

Le Soleil parût éclipsé à 8h 44′ 30″ de onze doits & demi. L'Eclipse augmenta encore pendant quelques minutes qu'on ne pût pas marquer. On fit l'Observation de cette Eclipse avec un verre de 12 pieds qui représentoit l'image du Soleil dans une chambre obscure, & l'on marquoit les minutes & les secondes à une Pendule reglée exactement au Soleil les trois jours précédens.

Depuis le rapport que nous avons fait à l'Académie de diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 12 *Mai* 1706, *nous en avons reçû plusieurs autres faites en* Allemagne *qui nous ont été envoyées par M.* Einsenschmid. *En voici le résultat.*

A Nuremberg *par M.* Wurtzelbaur.

	A *Nuremberg.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Nuremberg.*
Commencement à	9h 6′ 30″	8h 32′ 0″	34′ 30″
Fin de l'Eclipse.	11 28 0	10 54 0	34 0

L'Eclipse a été totale à *Nuremberg.*

* Pag. 470. in 4.

* *A* Neubourg *sur le* Danube *par les P. P. Jesuites.*

	A *Neubourg.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Neubourg.*
Commencement à	$9^h\ 6'\ 20''$	$8^h\ 30'\ 30''$	$35'\ 50''$
Immersion totale.	10 12 10	9 37 30	34 40
Recouvrement de lumiere.	10 15 33	9 40 50	34 43
Fin de l'Eclipse.	11 26 20	10 52 40	33 40

A Jena *par M.* Hambergerus.

	A *Jena.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Jena.*
Commencement à	$9^h\ 11'\ 40''$	$8^h\ 35'\ 0''$	$36'\ 40''$
Fin de l'Eclipse.	11 32 18	10 56 25	35 53

La grandeur de l'Eclipse fût observée à *Jena* de 11 doits ½.

A Leipsik *par Messieurs* Rivinus & Junius.

	A *Leipsik.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Leipsik.*
Commencement à	$9^h\ 14'\ 9''$	$8^h\ 35'\ 45''$	$38'\ 34''$
Fin de l'Eclipse.	11 37 31	10 58 0	39 31

A Zeitz

A Zeitz *par M.* Teuberus.

	A *Zeitz.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Zeitz.*
Commencement à	9h 15′ 30″	8h 35′ 40″	39′ 50″
Fin de l'Eclipse.	11 36 41	10 57 30	39 11

La grandeur de l'Eclipse fût observée à *Zeitz* de 11 doits & demi.

A Berlin *par M.* Hofman.

	A *Berlin.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Berlin.*
Commencement à	9h 24′ 20″	8h 39′ 45″	44′ 35″
Fin de l'Eclipse.	11 45 27	11 1 0	44 27

La grandeur de l'Eclipse fût observée à *Berlin* de 11 doits 52 minutes & demi.

* *A* Breslaw *par le P.* Heinrich. *Pag.471. in 4.

	A *Breslaw.*	A *Paris* par la Figure.	Différence des meridiens entre *Paris* & *Breslaw.*
Commencement à	9h 39′ 40″	8h 39′ 45″	59′ 55″
Immersion totale.	10 49 0	9 49 25	59 35
Recouvrement de lumiere.	10 50 0	9 51 10	58 50
Fin de l'Eclipse.	12 2 20	11 4	58 20

DE L'ECLIPSE DE LUNE

Du 21 Octobre 1706 à l'Observatoire.

Par Mrs. DE LA HIRE.

† LE Ciel a été couvert ici dans toute la durée de cette Eclipse, & les gros pelottons de nuées qui passoient assez promptement, n'auroient pas empêché qu'on n'en eut observé plusieurs phases, s'il n'y eut eu encore audessus une espece de gros brouillard, au travers duquel les corps lumineux paroissent comme cotonneux, ensorte qu'on ne peut voir leur disque ni leurs parties bien terminées; ce qu'on remarque assez souvent en observant le Soleil, quoique son disque paroisse assez net à la vûe simple.

Cependant nous avons observé avec le micrometre appliqué à une Lunette de 7 piés de foyer le diamétre de la partie éclairée avec autant de justesse qu'il nous a été possible, quoique les termes de l'ombre ne parussent qu'à peine dans les tems où l'on voioit la Lune le plus distinctement, dont nous avons tiré la quantité de l'Eclipse, comme il suit.

* Pag. 72. in 4.

* *Diamétre de la partie éclairée.*				*Quantité de l'Eclipse.*	
H.	′	″	‴ de degré.	Doits.	Minutes.
à 6	37.	15	9	5	9
	45.	15	50	6	18

† 17. Novembre 1706.

	58.	15	0	6	36
7.	17.	14	15	6	42
	23.	13	10	7	14

Le Ciel fût si couvert dans tout le reste de l'Eclipse que nous n'en pûmes plus rien observer, & à peine voioit-on un leger vestige du corps de la Lune par intervalles.

On ne pouvoit rien remarquer des taches dans le tems où le Ciel paroissoit plus découvert.

Un peu après l'Eclipse le Ciel devint assez clair, & nous observames le diamétre de la Lune de 33′34″ à la hauteur de 46 degrez ½, d'où nous concluons que son diamétre horizontal étoit de 33′0″.

OBSERVATIONS

Faites sur le Squelet d'une jeune femme agée de seize ans, morte à l'Hôtel-Dieu de Paris *le* 22 *Fevrier* 1706.

Par M. MERY.

AVIS.

† LEs parties de ce Squelet sont décrites dans leur situation naturelle; mais les figures représentent à gauche celles du côté droit, & celles du côté gauche au droit.

Première Observation. Le Squelet de cette femme n'a que trois pieds de haut ou environ.

† 20. Novembre 1706.

Son peu de hauteur a pour cause la courbure de l'épine, & celle des os des cuisses & des jambes. Celle-ci est telle que la plante des pieds *posant à terre, les femurs se trouvent nécessairement fléchis en devant; de sorte que ces deux os ne contribuent en rien, ou très-peu à sa hauteur. Delà vient aussi que ce Squelet étant debout sur ses jambes, paroît comme s'il étoit assis: ce qui donne lieu de croire que cette femme gardoit pendant sa vie une semblable posture en marchant.

*Pag. 473. in 4.

Cette conjecture paroît d'autant plus vraisemblable que les os des cuisses & des jambes étant étendus, la plante des pieds de ce Squelet, au lieu de poser à terre, comme elle devroit faire, si ces os n'étoient point courbez, se trouve au contraire tournée en arriere comme quand on est à genoux; ainsi il n'y a que l'extrémité de la derniere phalage des orteils de ce Squelet qui puisse toucher la terre; situation dans laquelle il étoit absolument impossible que cette femme pût marcher. Sur cela voyez la seconde Figure.

Seconde Observations. Les os des cuisses de ce Squelet étant étendus, & ceux des jambes fléchis, il n'y a que la rotule avec la partie superieure du tibia qui posent à terre, parceque le demi-cercle que décrivent dans leur partie moyenne le tibia & le peroné, fait que ce Squelet étant appuyée sur ces genoux, la partie inferieure de ses jambes se trouve dans cette situation tournée en enhaut; delà vient que la plante des pieds regarde le ciel, au lieu d'être située en arriere, comme elle se trouve dans les personnes à genoux, dont la conformation des os des jambes n'a rien de vicié.

De

De ces deux Observation on peut tires ces deux conséquences. Prémierement, la plante des pieds de ce Squelet se trouvant tournée en dessus quand ses jambes sont fléchies & ses cuisses étendues, il étoit très-difficile à cette femme pendant sa vie de se tenir à genoux.

Secondement, cette femme aiant été obligée de tenir ses cuisses aussi fléchies en marchant qu'étant assise, il est évident que sa hauteur demeuroit la même dans ces deux situations. Mais s'appuiant sur ses genoux ses cuisses étendues * & ses jambes fléchies, elle pouvoit ajoûter à sa hauteur ce que le femur a de plus de longueur que le tibia, ce qui ne va pas à plus d'un pouce, en mesurant l'un & l'autre par une ligne droite; au lieu qu'elle l'auroit augmentée d'environ six pouces si elle avoit pu se tenir à genoux sur la partie convexe des os de ses jambes, ce qui n'étoit peut-être pas impossible; alors elle auroit paru plus grande en gardant cette posture qu'en marchant. C'est ce qu'on remarque en effet par son Squelet en le mettant dans ces différentes situations.

* Pag. 474. in 4.

Troisiéme Observation. L'épine de ce Squelet, dont la courbure est la cause de la difformité de toutes les autres parties de son tronc, imite parfaitement bien par ses différens concours la figure du corps d'un serpent qui rampe sur la terre pour s'avancer en avant. Tous ces contours extraordinaires se font sur les côtez de l'épine; ce qui n'empêche pas cependant les vertebres de former devant & en arriere les mêmes enfoncemens & les mêmes éminences qu'elles ont dans un Squelet dont l'épine n'a rien de difforme.

De la prémiere vertebre du coû à la derniere, l'é-

l'épine est peu sensiblement cave du côté droit, & convexe du côté gauche ; mais depuis la prémiere vertebre du dos jusqu'à la derniere, l'épine est fort convexe du côté droit, ce qui fait que de ce côté-là le corps des vertebres est peu éloigné des côtes : mais parceque cette épine est fort concave du côté gauche, il y a entre les côtes & les vertebres une distance beaucoup plus grande. D'ailleurs la partie anterieure des vertebres du dos est un peu tournée du côté droit.

Au contraire les vertebres des lombes forment par leur assemblage une gibbosité très-grande du côté gauche, & une concavité du côté droit qui lui est proportionnée, & le devant de ces vertebres panche un peu du côté gauche.

Enfin l'os sacrum joint au coxis paroît convexe du côté droit & concave du côté gauche, quoiqu'il garde outre * cela sa figure naturelle qui est d'être creux par devant & gibbe par derriere.

* Pag. 475. in 4.

Quatriéme Observation. Ces différens contours que fait l'épine sur ses côtez, sont cause de ce que la symphyse du menton qui répond en ligne droite à celle des os pubis dans un Squelet bien formé, s'en trouve éloignée dans ce Squelet difforme de deux à trois pouces ; delà vient que la face paroît un peu tournée sur le côté gauche, & le bassin de la cavité hypogastrique tourné sur le côté droit. Cependant l'extrémité du coxis est directement opposée à la prémiere vertebre du coû ; de sorte que malgré la grande obliquité de l'épine, le corps de cette femme ne panchoit point plus d'un côté que de l'autre ; ce qui empêchoit qu'il ne parût étant garni de ses chairs & revêtu de sa peau, aussi contrefait que l'est le tronc de son Squelet.

Cin-

Cinquiéme Observation. Les vertebres du dos repoussant du côté droit par leur convexité l'extrémité posterieure des côtes superieures, forment avec elles de ce côté-là une bosse considérable par derriere; delà vient que l'omoplate droit paroît fort relevé. La même convexité de ces vertebres fait aussi que les côtes du même côté décrivent en dedans par leur partie posterieure un arc fort courbé, ce qui rend la capacité de la poitrine beaucoup plus petite du côté droit que du côté gauche.

Mais parceque les mêmes vertebres du dos entraînent avec elles au dedans de leur courbure les côtes gauches qui leur sont articulées, delà vient que l'omoplate gauche paroît de ce côté-ci applati sur le dos, & que les côtes gauches décrivent un arc beaucoup plus ouvert que n'est celui des côtes droites, ce qui rend la capacité gauche de la poitrine beaucoup plus vaste que la droite. C'est encore cette même courbure des vertebres du dos qui est cause que le sternum décrit une ligne un peu oblique sur le devant de la poitrine, au lieu d'y décrire une ligne droite comme il fait ordinairement.

Sixiéme Observation. Comme les vertebres des lombes * forment au contraire une convexité fort grande du côté gauche, & une concavité très-considérable du côté droit; delà vient que l'espace qui se trouve entre les fausses côtes, les os des iles & ces vertebres est beaucoup plus grand du côté droit que du côté gauche; ce qui rendoit la capacité du ventre de cette femme plus petite du côté gauche que du côté droit.

* Pag. 476. in 4.

Septiéme Observation. Mais parceque la courbure que forme l'os sacrum avec le coxis est faite dans un sens contraire à celle des vertebres

bres des lombes, l'espace qui se rencontre entre ces os & l'ischium, est par cette raison plus petit du côté droit que du côté gauche.

Par toutes ces observations il est facile de voir que toute la difformité du tronc du Squelet de cette femme ne peut avoir d'autre cause que la courbure des vertebres: mais il est difficile de trouver celle des contours contraires que fait l'épine par le moien de leur assemblage. Tâchons cependant de la découvrir.

Huitiéme Observation. De ce que les vertebres, ont un peu plus d'épaisseur du côté que l'épine est convexe que de son côté concave, il semble d'abord qu'il n'est rien de si aisé que d'expliquer sa courbure par ce plus & moins d'épaisseur; cependant si l'on fait réflexion que cette épaisseur n'est point une cause efficiente, on concevra sans peine que l'épine n'a pu par son moyen se contourner sur ses côtez en sens contraires; ainsi l'on reconnoîtra qu'il est impossible de rendre raison de ses différens contours par ce plus & moins d'épaisseur des vertebres, & qu'il faut nécessairement avoir recours à la seule contraction des muscles racourcis de l'épine pour expliquer sa différente courbure; parceque le relâchement de ces muscles allongez, & le plus & le moins d'épaisseur des vertebres ne peuvent être que des effets de ses muscles racourcis, comme je le ferai voir par la suite de ces Observations.

Neuviéme Observation. Quand l'épine a sa figure reguliere, & que tous ses muscles agissent ensemble en même tems avec force égale de part & d'autre, ils la flechissent * seulement en arriere, & ne lui font décrire qu'une seule ligne courbe; de sorte que dans cette disposition des muf-

* Pag. 477. in 4.

muſcles l'épine ne peut pancher d'un côté ni d'autre. Mais s'il arrive que tous les muſcles du côté droit entrent en contraction, & que tous ceux du côté gauche tombent dans le relachement; alors l'épine ſe flechit toute entiere du côté droit. Le contraire ſuccede quand après cela tous les muſcles du côté gauche ſe contractent, & que ceux du côté droit ſe relachent.

Or comme l'ame preſide aux mouvemens de tous les muſcles de l'épine en faiſant couler tantôt dans les uns & tantôt dans les autres les eſprits animaux qui les gonflent, il eſt évident que les nerfs qui donnent paſſage à ces eſprits dans les muſcles de l'épine, doivent être tous parfaitement libres & également ouverts de part & d'autre quand ſes muſcles la flechiſſent en arriere, à droit & à gauche alternativement.

Dixiéme Obſervation. Quand donc l'épine demeure conſtamment flechie de l'un ou de l'autre côté, il faut néceſſairement que le cours des eſprits animaux dans ſes muſcles ne ſoit plus ſoûmis à la direction de l'ame, & qu'une partie de ſes nerfs ſouffre quelque obſtruction, pendant que l'autre reſte libre. Il doit donc couler tout naturellement dans celle-ci plus d'eſprits que dans l'autre; donc les muſcles de l'épine qui en reçoivent une plus grande quantité doivent en ſe gonflant s'acourcir & tenir toujours l'épine flechie de leur côté.

Par ce ſyſtême ſi vrai-ſemblable il eſt aiſé & de rendre raiſon de la figure irréguliere de l'épine, & de faire voir que l'extenſion de ſes muſcles relachez, & l'épaiſſeur des vertebres plus petite d'un côté que de l'autre ſont unique-

quement l'effet de la contraction de ses muscles racourcis. Ce que je vais démontrer.

Comme je n'ai jamais vû d'enfant venir au monde avec une épine contournée, je suppose que cette femme a passé quelque tems de sa vie aiant l'épine à l'ordinaire: mais qu'étant arrivé quelque obstruction dans ses nerfs, ses * muscles se sont plus contractez d'un côté que de l'autre. Or comme depuis cette obstruction l'épine de cette femme a toujours gardé la figure contournée qu'on remarque dans son Squelet, & qu'il n'a point été en son pouvoir de la redresser, il est évident que l'ame n'a pu pousser assez d'esprits dans les muscles étendus de l'épine pour surmonter la résistance de ses muscles racourcis; parceque les nerfs de ceux-ci aiant toujours resté ouverts, ses muscles contractez ont reçû incessamment beaucoup plus d'esprits que ses muscles relachez, les nerfs de ceux-là étant toujours demeuré fermez. Donc les muscles racourcis de l'épine la tenant par leur contraction permanente inflexiblement fléchie de leur côté, ils ont dû prémierement tenir les muscles qui leur sont opposez dans une perpetuelle extension. Secondement ils ont toujours pressé les vertebres moins dures qu'à l'ordinaire les unes contre les autres, & empêché par conséquent leur corps de s'étendre du côté de leur racourcissement, & en les écartant de l'autre leur permettre de s'épaissir davantage du côté des muscles relâchez. Donc l'extension des muscles allongez de l'épine, & l'épaisseur du corps des vertebres plus grande d'un côté que de l'autre, ne peuvent être que l'effet de la contraction de ses muscles racourcis. La contraction permanente & involontai-

* Pag. 478. in 4.

re

re de ces muscles est donc l'unique cause efficiente de la courbure extraordinaire de l'épine.

Car il n'y a pas d'apparence que la pesanteur du corps ait pu y avoir part; parceque la pesanteur ne pouvant faire pencher le corps que du côté qu'elle se trouve plus grande, elle n'auroit pû faire décrire à l'épine que d'un côté seulement une seule courbure, & éloigner par conséquent la tête de la ligne perpendiculaire qu'elle décrit avec l'os sacrum, les os des îles demeurant immobiles sur les deux jambes.

Or comme l'épine du Squelet de cette femme forme sur ses côtez dans l'étendue de sa longueur quatre lignes courbes toutes opposées les unes aux autres en sens contraires, * & que le coxis répond cependant en ligne droite à la prémiere vertebre du coû malgré cette irregularité, il ne paroît donc nullement vrai-semblable que la pesanteur du corps ait pu causer ces différens contours de l'épine. Il n'en est pas de même de la courbure des os des cuisses & des jambes que je vais examiner.

*Pag 479. in 4.

Onziéme Observation. Les deux femurs décrivant chacun presqu'un demi-cercle, dont la partie convexe est située sur le devant, & la concave sur le derriere de ces os. Mais parceque l'un & l'autre se jettant en dehors, l'espace qui est entr'eux se trouve beaucoup plus grand dans leur milieu qu'entre leurs extrémitez.

Le tibia & le peroné de chaque jambe forment la même figure que les deux femurs (ce qui est assez mal représenté, à moins que la perspective ne le demande, comme le Dessinateur le prétend) mais avec cette différence que la partie convexe du demi-cercle qu'ils décrivent

vent se porte en dedans, & la concave en dehors; de sorte que les deux tibia se touchent presque par leur milieu, & qu'ils sont fort écartez l'un de l'autre par leurs extrémitez, ce qui fait que les pieds qui n'ont rien de difforme se jettent en dehors. De plus le tibia & le peroné sont applatis considérablement sur les côtez dans leur partie moienne, & un peu tortus dans toute leur longueur.

Après avoir décrit la figure irréguliere de ces os, faisons voir à présent que la pesanteur du corps de cette femme jointe à leur peu de solidité, a beaucoup contribué à leur courbure.

Douzième Observation. Si l'on fait attention que les pieds de son Squelet posant à plomb sur un plancher, les os des cuisses se trouvent nécessairement flechis en devant, ce qui fait que ce Squelet paroît assis quoiqu'il soit debout, on concevra aisément qu'il n'y a eu que la seule pesanteur du corps qui ait pu forcer les cuisses de cette femme à demeurer fléchies en marchant. Car l'on ne peut pas dire que pour les tenir en cet état leurs muscles flechisseurs

*Pag 480. in 4.

* soient demeurez dans une perpetuelle contraction comme ceux de l'épine, puisque cette femme aiant pu pendant sa vie se mettre à genoux, il est évident que ces muscles ont dû se relacher pour donner lieu à leurs antagonistes d'étendre les cuisses, sans quoi il eut été absolument impossible à cette femme de prendre cette posture.

Il y a même bien de l'apparence, chaque femur décrivant un arc convexe en devant & concave par derriere, que la contraction des muscles extenseurs des cuisses a toujours été plus forte que celle de leurs flechisseurs, autre-

trement les femurs n'auroient pu ainsi se courber.

Mais parceque les jambes se flechissent en arriere, & que leurs os décrivent des arcs semblables à ceux des cuisses tant par leur figure que par la situation de leurs parties, il paroit fort vrai-semblable que la contraction des muscles flechisseurs des jambes a dû être au contraire plus forte que celle de leurs extenseurs.

Cependant il faut bien observer que ni la pesanteur du corps ni la contraction des muscles des cuisses & des jambes n'auroient jamais pu causer la courbure du femur, du tibia & du peroné, si ces os eussent eu assez de dureté pour résister à l'impression de ces ceux causes, leur peu de solidité a donc contribué en quelque façon à les flechir. Aussi voit-on que ni la pesanteur du corps ni la contraction des muscles ne produisent point cet effet quand la résistance de ces os surpasse l'effort de ces deux causes.

Il faut encore remarquer que la pesanteur du corps & la molesse des os ne peuvent être que des causes occasionelles de leur courbure, puisqu'il n'y a que la contraction des muscles des cuisses & des jambes plus forte d'une part de l'autre qui ait pu déterminer le femur, le tibia & le peroné à se flechir plutôt en arriere qu'en devant.

La courbure des os des bras à laquelle il est certain que la pesanteur du corps n'a pu contribuer, est une preuve évidente de cette verité; d'où je conclus enfin que la contraction des muscles plus forte d'un côté que de l'autre, est l'unique cause efficiente de la courbure des os.

*Je

*Pag. 481. in 4. * Je dis que la contraction des muscles doit être plus forte d'une part que de l'autre pour flechir les os mêmes; parceque quand les muscles antagonistes d'une partie agissent avec force égale, ils maintiennent les os dans leur figure naturelle, malgré leur molesse & la pesanteur du corps.

A l'égard de l'applatissement des os des cuisses & des jambes, comme il ne paroît pas qu'il puisse être rapporté à aucune des causes dont j'ai parlé, il y a lieu de croire qu'il ne peut être que l'effet d'une vicieuse conformation.

COMPARAISON

De l'Observation de l'Eclipse de Lune arrivée en Avril 1706, *& faite dans l'Isle de S.* Domingue *en* Amerique, *avec celle qui a été faite à l'Observatoire Royal à* Paris.

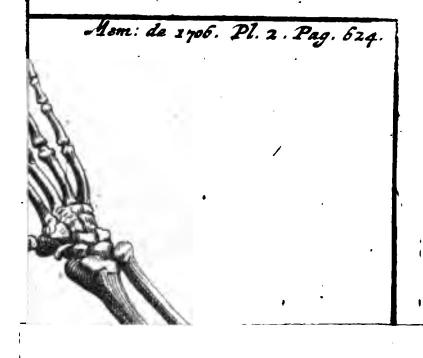
Par M. DE LA HIRE.

† LE Pere *Gouye* communiqua à l'Académie Samedi dernier une Observation de l'Eclipse de Lune du mois d'Avril de cette année, laquelle avoit été faite au Port de *Pei* dans l'Isle de S. *Domingue* en *Amerique*.

Cette Observation porte que la Lune étoit éclipsé de 1 doit ½ à 7h 15′ du soir le 27 Avril, & que la fin de l'Eclipse parût à 9h 40′. Sa quantité dans le tems de sa plus forte obscuration étoit

† 24. Novembre 1706.

cles doit



étoit de 5 doits ½. L'Observateur marque qu'il ne connoissoit pas l'heure dans la derniere exactitude.

Cependant cette Observation ne laissera pas d'être d'une assez grande utilité, puisque nous n'en avons point qui ait été faite dans ces quartiers dont nous en puissions conclure la longitude.

Comme le commencement de cette Eclipse n'a pu être observé à *Paris*, nous ne pouvons rien dire de l'Observation de 1 doit ½; mais pour la fin nous l'avons très-bien observée le 28 Avril au matin à $3^h\ 4'\ 30''$, & au Port de *Pei* on l'a vûe le 27 au soir à $9^h\ 40'$: donc la différence de longitude * entre l'Observatoire Royal & le Port de *Pei* sera de $5^h\ 24'\ 30''$, ou bien $81^\circ\ 7'\frac{1}{2}$, dont ce lieu de l'Isle de S. *Domingue* est plus occidental que *Paris*.

* P. 482.

La quantité de cette Eclipse dans le tems de la plus grande obscuration a été observée ici de 5 doits 40', & au Port de *Pei* de 5 doits 30', ce qui n'est que fort peu éloigné pour une Observation qui n'a pas été faite avec tous les instrumens nécessaires pour une grande justesse, & elle peut nous persuader de la bonté des précédentes.

Enfin je remarquerai que la plûpart des Cartes que nous estimons les plus correctes, posent ce lieu de S. *Domingue* moins éloigné de *Paris* qu'il ne paroît par cette Observation, d'environ 6 degrez.

OBSERVATION

De la conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion arrivée au mois d'Octobre 1706.

PAR M. DE LA HIRE.

† JE ne trouve dans les anciens Mémoires d'Astronomie que nous avons entre les mains, que deux Observations de cette conjonction. La prémiere fût faite à *Athenes* l'an 508 de Nôtre Seigneur le 28 Septembre au matin, comme le rapporte M. *Bouillaud* au Liv. 7. Chap. 7. de son *Astronomie Philolaique*, ce qu'il avoit tiré d'un Manuscrit de la Bibliotheque du Roi.

Cette Observation porte que Jupiter étoit seulement éloigné du cœur du Lion vers le Septentrion de 3 doits, & M. *Bouillaud* estimant un doit de 2′ 30″, cet éloignement sera de 7′ 30″. Mais il ajoûte que le cœur du Lion étoit alors à 8° 49′ 54″ ♌, & le Pere *Riccioli* qui rapporte cette même Observation, dit que suivant ses propres Observations des Etoiles fixes, le cœur du Lion devoit être à 8° 51′ 57″ ♌. La différence qu'il y a entre ces deux positions * de cette Etoile, est seulement de 2′ 3″ dont le Pere *Riccioli* la fait plus avancée. M. *Bouillaud* s'étoit servi du Catalogue des Etoiles de *Tycho*; mais le Pere *Riccioli* avoit fait beaucoup d'observations sur les Etoiles avec le P. *Grimaldi*.

* Pag. 483. in 4.

Mais

† 18. Decembre 1706.

Mais par mes Tables je trouve le lieu du cœur du Lion au tems de l'Observation d'*Athenes* à 8° 53' 54" ♌, ce qui est 4' plus avancé que M. *Bouillaud*. La longitude de ♃ étoit donc alors la même que celle de l'étoile *Regulus* ou le cœur du Lion à 8° 53' 54" ♌.

La latitude de cœur du Lion, comme je l'ai déterminée, est de 27' 6" *B*; & la posant invariable, si on l'ajoûte aux 7' 30" de la distance *B* de cette étoile à ♃, on aura sa latitude de 34' 36" *B* dans le tems de l'Observation. Mais M. *Bouillaud* trouve à propos d'ajoûter encore un doit à l'Observation de la distance de ♃ à *Regulus*, & par consequent cette latitude étoit de 37' 6" Bor.

La seconde Observation d'une semblable conjonction que M. *Bouillaud* rapporte aussi dans le 3. Chap. du Liv. 7. de son *Astronomie*, est de lui-même, en 1623 le 12 Octobre à 17^h à *Loudun*. Il dit qu'il observa que ♃ étoit plus avancé en longitude de 3' que le cœur du Lion, & qu'il en étoit éloigné de 8' vers le Septentrion. Il conclud delà la longitude de ♃ au 24° 40' 6" ♌ avec sa latitude Boreale de 35'. Par les Tables des fixes du Pere *Riccioli* la longitude de ♃ sera au 24° 36' 35" du ♌. M. *Bouillaud* qui n'avoit que 19 ans alors ne rapporte point de quelle maniére il fit cette observation, ni avec quels instrumens, quoique le Pere *Riccioli* lui fasse dire que c'étoit avec la Lunette.

Par ma position de *Regulus* je trouve que ♃ étoit alors au 24° 40' 1" ♌ comme fait M. *Bouillaud*. Pour la latitude de ♃ elle auroit été de 35' 6" suivant ma latitude de *Regulus*, & à très-peu près comme M. *Bouillaud*.

Voici l'observation d'une semblable conjonc-

tion de cette Planete que j'ai faite le 17 Octobre 1706 à 4h 12' 40" du matin. Je mesurai avec le micrometre la distance* entre le cœur du Lion & ♃ de 19' 25", ♃ étoit vers le Septentrion à l'égard de cette étoile, & de plus il étoit dans la ligne droite qui passe par l'étoile marquée *A* dans *Bayer* & par le cœur du Lion; cependant ♃ me sembloit un peu plus vers l'Occident.

*Pag. in 4.

Je trouve par mes Tables que le lieu du cœur du Lion étoit alors au 25° 47' 15" ♌. Mais par la position que je viens de marquer, ♃ étoit moins avancé que *Regulus* ou le cœur du Lion selon l'ordre des Signes de 7' 35'; donc la longitude de ♃ étoit alors à 25° 39' 40" du ♌.

Mais aussi la distance de ♃ à *Regulus* de 19' 25" étant oblique à l'Ecliptique, elle se réduit à 17' 55" par sa position entre les étoiles fixes; & comme la latitude de *Regulus* est de 27' 6" par mes Tables, on aura la latitude Bor. de ♃ de 45' 1".

J'ai calculé par mes Tables le lieu de ♃ tant en longitude qu'en latitude au tems de mon observation, & j'ai trouvé la longitude à 25° 40' 11" du Lion, & l'observation la donnoit à 25° 39' 40": donc la différence n'est que de 31" de degré. Pour la latitude tirée du calcul elle est de 46' 21" Bor. & l'observée 45' 1" *B*; & par conséquent la différence seroit de 1' 20".

Les différences que je viens de trouver entre mon observation & mon calcul ne sont pas considérables; mais comme dans la construction de mes Tables Astronomiques je me suis presque toujours servi des observations des passages par le meridien, que j'estime bien plus

sû-

sûres, bien plus justes & plus déterminantes que toute autre, surtout à cause de tous les avantages que nous avons tant de la part des instrumens & des horloges, que des connoissances nécessaires pour déterminer leur véritable position en longitude & en latitude; j'ai voulu voir si ces sortes d'observations que j'avois faites aux environs de cette conjonction répondoient à celles dont je m'étois servi, & premiérement pour la position du nœud de ♃ & pour son mouvement; car c'est dans ce point où je suis beaucoup éloigné de M. *Bouillaud*, comme je le dirai dans la suite.

* Le premier passage de ♃ par le meridien que j'ai pu observer avant qu'il fût arrivé à son nœud ascendant a été en 1705 le 6e Mars au soir à $5^h\,56'\,51''$, & sa vraie hauteur meridienne étoit de $63°\,50'\,25''$. * Pag. 485. in 4.

Je conclus de cette observation que la longitude de ♃ étoit alors au $17°\,25'\,10''$ de ♊, & sa latitude australe de $12'\,55''$. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems la longitude au $17°\,23'\,45''$ de ♊, & la latitude australe de $12'\,19''$. La différence de longitude entre le calcul & l'observation est de $1'\,25''$, & celle de la latitude de $36''$.

Mais le premier passage de ♃ par le meridien que je pus observer ensuite après qu'il eut passé par ce même nœud, fût en 1705 le 27 Août au matin à $9^h\,7'\,3''$: sa vraie hauteur meridienne étoit de $63°\,9'\,48''$. Il faut toujours entendre dans ces observations que c'est du centre de cette Planete dont je parle.

Je conclus de cette observation que la longitude de ♃ étoit alors à $20°\,44'\,9''$ du ♋, & que sa latitude Boreale étoit de $6'\,3''$. Mais par le

calcul de mes Tables sa longitude étoit de 20° 41′34″, & la latitude 6′ 47″ Bor. La différence de longitude entre le calcul & l'observation est donc de 2′ 35″, & celle de la latitude de 44″.

Quoique la différence de latitude entre le calcul & ces deux observations ne soit que d'une demi-minute ou environ, ce qui n'est pas considérable dans ces sortes de positions, je pourrois pourtant le faire convenir en avançant le nœud un peu plus que je n'ai fait ; mais mes anciennes observations ni d'autres plus recentes ne s'y seroient pas accordées. Et c'est cela principalement qui m'a fait conjecturer qu'il y avoit dans le mouvement du nœud des Planetes une irrégularité à peu près semblable à celle que nous connoissons dans celui de la Lune, & comme elle m'a paru sensiblement dans Saturne, laquelle demanderoit une prostapherese particuliere. Mais comme je n'ai pas trouvé que dans ♃ cette irrégularité fût assez sensible pour y avoir égard, je me suis contenté de prendre une * position moienne entre toutes celles qui m'étoient marquées par mes observations. Cette position ou Epoque a été pour l'année 1700 moins avancée que celle de M. *Bouillaud* de plus de 2 degrez. Si j'avois posé le nœud de ♃ comme M. *Bouillaud* le met, j'aurois trouvé dans les deux observations précédentes une différence de plusieurs minutes entre l'observation & le calcul.

Enfin pour revenir à la conjonction de ♃ avec *Regulus*, j'ai cru qu'il ne suffisoit pas d'avoir montré que mes Tables s'accordoient assez bien avec mon observation dans ce point ; mais qu'il falloit encore en donner des preuves par quel-

quelque passage de cette Planete par le meridien, avec ses vraies hauteurs meridiennes observées dans le même tems. Voici donc celles que j'ai faites lorsqu'il m'a été possible de l'observer; car je ne puis pas voir ♃ au meridien, à moins qu'il ne soit éloigné du Soleil d'environ 30 degrez.

Le 20 Septembre de cette année 1706 avant la conjonction de ♃ avec *Regulus*, son centre passa au meridien à $9^h\ 45'\ 25''$ du matin, & sa vraie hauteur meridienne étoit de $56^\circ\ 23'\ 31''$. Je tire de cette observation la longitude de ♃ au $20^\circ\ 49'\ 47''$ du ♌, & sa latitude Boreale de $40'\ 51''$. Le calcul de mes Tables me donne pour ce même tems la longitude de cette Planete au $20^\circ\ 52'\ 0''$, & la latitude Bor. de $41'\ 58''$. La difference de longitude entre l'observée & le calcul est de $2'\ 13''$, & celle de la latitude est de $1'\ 7''$.

Le 14 Octobre suivant, & trois jours avant la conjonction de ♃ à *Regulus*, j'observai le passage du centre de ♃ par le meridien à $8^h\ 35'\ 16''$ du matin, & sa vraie hauteur meridienne étoit de $55^\circ\ 1'\ 8''$. Je conclus de cette observation que la longitude de ♃ étoit alors au $25^\circ\ 13'\ 26''$ du ♌, & que sa latitude étoit Boreale de $45'\ 33''$. Le calcul de mes Tables donne sa longitude pour ce tems-là au $25^\circ\ 12'\ 11''$ du ♌, & sa latitude Boreale de $45'\ 51''$: donc la difference de longitude entre l'observée & le calcul est de $1'\ 15''$, & celle de latitude de $18'$.

* Le 18 du même mois & le jour suivant la conjonction de ♃ à *Regulus*, j'observai le passage du centre de ♃ par le meridien à $8^h\ 22'\ 51''$ du matin, & sa vraie hauteur meridienne de

* Pag. 487. in 4.

54° 48′ 22″, d'où je tire par les regles ordinaires le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 9″ du ♌ avec une latitude Boreale de 45′ 47″. Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems le vrai lieu de ♃ au 25° 51′ 12″ du ♌ avec une latitude Boreale de 45′ 35″: donc la différence de longitude entre l'observation & les Tables 3″, & celle de la latitude de 12″.

Enfin le 27 suivant j'observai encore le passage du centre de ♃ par le meridien à 7h 53′ 57″ du matin, & sa vraie hauteur meridienne de 54° 23′ 7′. Je conclus de cette observation que ♃ étoit alors au 27° 12′ 21″ du ♌, & que sa latitude étoit Boreale de 48′ 13″, & le calcul par mes Tables donne la longitude pour ce même tems de 27° 11′ 34′ du ♌, & la latitude Boreale de 48′ 22″. La différence de longitude entre l'observation & le calcul sera donc de 47″, & celle de latitude de 9″.

Les observations que je viens de rapporter en dernier lieu, lesquelles sont comparées avec le calcul, font voir la justesse de mes Tables, & l'on ne doit pas s'étonner si dans celles qui sont proches les unes des autres on y trouve des différences qui passent une minute de degré tantôt excedente & tantôt défaillante, ce qu'on doit plutôt attribuer à quelque cause particuliere de l'observation ou des instrumens qu'aux Tables, surtout pour les Planetes superieures qui vont lentement; car il s'y doit trouver une espece de progression assez uniforme pour un peu de tems, & à peu près telle que la donne le calcul.

Je pourrois rapporter ici plusieurs causes qui empêchent que les observations ne répondent à l'exactitude & aux soins qu'on y apporte; mais il

il me suffira de dire à présent que pour remedier à cet inconvenient, on doit faire un grand nombre de semblables observations entre lesquelles on prend un milieu.

Dans ce que j'ai dit ci-devant je n'ai point comparé * mon calcul avec l'observation de 508, ni avec celle de 1623, sur lesquelles M. *Bouilland* fonde une partie de son systême de Jupiter; car il m'a semblé qu'elles ne sçauroient s'accorder exactement entr'elles, ni avec celles que nous faisons présentement. Ces sortes d'observations sont sujettes à des erreurs très-considérables, n'étant faites pour la plûpart qu'à la vûe simple & sans aucune détermination positive. On ne laisse pas pourtant de s'en servir autant qu'on le peut, quand elles sont fort éloignées de ces tems-ci, parcequ'elles sont utiles pour déterminer à peu près les mouvemens des corps celestes; mais on ne doit pas s'y assujettir par trop, quand elles repugnent aux dernieres qu'on connoit pour très-exactes.

* Pag. 488. in 4.

Par exemple, mes Tables me donnent dans le tems de l'observation d'*Athenes* le lieu de ♃ plus avancé que l'observation ne demanderoit de près de 8′, & la latitude seulement plus petite de trois quarts de minute. Mais pour celles de M. *Bouilland* de 1623, elles me donnent la longitude un peu plus de 10′ plus avancée que l'observation, & la latitude plus grande de plus de 10′, & dans tous ces tems-ci elles s'accordent avec le Ciel.

C'est cette latitude plus grande de 10′ qui me rend suspecte l'observation de M. *Bouilland*; car mes Tables donnent la latitude dans la même minute que l'observée en 508, & depuis ce tems-là jusqu'à l'observation de M. *Bouilland*

en 1623 il y a plus de 1100 ans, pendant lesquels le nœud de ♃ n'a fait que 2 ou 3 degrez, & en 508 au tems de l'observation l'argument de latitude n'étoit que de 27° environ; donc en 1623 l'orbite de ♃ n'avoit pas changé considérablement de sa premiere place, & dans le tems de cette observation ♃ & la terre se trouvoient encore à peu près dans le même aspect : mais comme le cœur du ♌ s'est avancé en 1100 ans de plus de 15 degrez, il faut néceſſairement que l'argument de latitude soit augmenté de plus de 13 degrez, ce qui doit donner en 1623 une inclinaison à ♃ beaucoup plus grande qu'elle n'étoit en 508; & par conséquent la latitude de
* Pag. 489. in 4 ♃ devoit être beaucoup * plus grande en 1623 qu'en 508; cependant l'observation de 508 donne la latitude de ♃ de 34′ 36″ ou 37′ 6″ comme veut M. *Bouillaud*, & son observation de 1623 ne la montre que de 35′ 6″, ce qui ne peut pas être; auſſi je l'ai trouvée par mes Tables de 10′ plus grande que celle qu'on tire de cette observation.

Enfin M. *Bouillaud* finit son septiéme Livre où il traite des mouvemens de ♃ par une espece d'insulte qu'il fait à *Kepler*, en donnant le calcul de ♃ pour le tems de l'observation de l'an 508 par les Tables *Rudolphines* pour faire voir que ces Tables sont fort défectueuses pour cette Planete ; car il dit qu'elles marquent la distance de ♃ à Regulus de plus d'un degré à cause de la latitude, & la longitude par ce même calcul étoit plus grande que l'observée de près de 48′. Mais je remarque que le peu de différence de latitude entre Regulus & ♃ , n'a pas pu augmenter la distance de 48′ à plus d'un degré. Il conclud enfin que *Kepler* n'a pas pu mieux faire

re aiant été privé de ce secours, c'est à dire des deux observations dont il parle.

Cependant comme je suis persuadé de l'exactitude de *Kepler*, & que s'il n'a pas eu les deux observations de M. *Bouillaud*, il en a eu d'autres & plus anciennes & dans le même tems à peu près que celle de 1623, j'entens celles de *Tycho* que j'estime des plus justes, & dont M. *Bouillaud* a eu aussi quelque connoissance; & quoique je sçusse bien que mes Tables étoient assez éloignées des *Rudolphines* en quelques endroits, j'ai voulu vérifier le calcul que M. *Bouillaud* rapporte tout au long, de la position de ♃ dans le tems de l'observation de 508 suivant les *Rudolphines*.

J'ai trouvé tout d'abord que le calcul de M. *Bouillaud* est faux, car il trouve le Soleil moins avancé d'un degré qu'il ne devroit être par ces Tables, ce qui est une erreur assez considérable, & ce qui vient assurément de ce que M. *Bouillaud* en calculant n'a pas fait attention que l'année 508 étoit Bissextile, & il l'a calculée comme une année commune, car il lui manque le mouvement du Soleil* pour un jour. Il a fait aussi la même faute pour le calcul de ♃ qu'il rapporte ensuite. Ces deux fautes ensemble lui auroient encore avancé le lieu de ♃ de 3′ environ. Pour la latitude elle est très peu éloignée de celle qu'on tire de l'observation.

* Pag. 490. in 4.

Pour ce qui est de l'observation de M. *Bouillaud* de 1623, les Tables *Rudolphines* s'y accordent assez bien en ce qui regarde la longitude, mais pour la latitude elles s'en écartent à peu prés autant que je l'ai trouvé par les miennes; d'où je conclus enfin que M. *Bouillaud* n'avoit pas bien estimé ou mesuré la distance entre Regu-

lus & ♃, & que la grande lumiere de ♃ lui faisoit paroître cette distance beaucoup plus petite qu'elle n'étoit en effet; & c'est une raison qu'il rapporte lui-même dans l'examen qu'il fait de quelques observations.

DIFFÉRENTES MANIÉRES INFINIMENT GÉNÉRALES

De trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes, soit qu'on regarde ces Courbes sous la forme de Polygones, ou non.

Par M. VARIGNON.

† LA maniére dont j'ai cherché le raport des Forces centrales aux Pesanteurs des corps dans le Mémoire que je donnai sur cela à l'Académie le 24. Avril dernier ‡, m'aiant engagé (excepté dans la troisiéme Solution du Problême par où ce Memoire commence) à considérer les Courbes, non à l'ordinaire sous la forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, mais comme faites d'élémens véritablement courbes eux-mêmes; je fus obligé d'en chercher les rayons osculateurs dans cette hypothêse, dans laquelle je ne sçais personne qui l'ait encore fait. C'est ce * qui m'a fait penser à les y rechercher en général; & cette considération des Courbes comme faites d'élémens véritablement

* Pag. 491. in 4.

ment

† 18. Decembre 1706.
‡ *Voyez ci-dessus la page 222.*

ment courbes eux-mêmes, m'a donné des expressions de ces rayons osculateurs, lesquelles se sont trouvées précisément les mêmes que celles que la considération de ces mêmes Courbes sous la forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes m'avoit déja données dans les Mémoires de 1701. pag. 29. &c.

Voici comment ces expressions me sont venues dans la prémiere de ces considérations ou hypothêses; & puis nous verrons encore quelques autres maniéres de les trouver dans la seconde par des voies toutes différentes de celle que j'ai suivie dans ces Mémoires de 1701.

PROBLÊME I.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, étant donnée; trouver une expression générale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant, & en regardant cette Courbe, non à l'ordinaire sous la forme de Polygone infinitilatere rectiligne, mais comme faite d'élémens courbes eux-mêmes.

SOLUTION.

I. Soit † *DBT* la Courbe quelconque donnée, dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent en *E*; & dont *AB*, *BC*, soient deux élémens, c'est-à-dire, deux arcs infinimens petits du premier genre, lesquels ne différent entr'eux que d'une grandeur infiniment petite du second genre, & par conséquent nulle par raport à eux. Soient aussi *AB*, *BC*, les cordes

† FIG. I.

de ces deux petits arcs, dont la premiére prolongée vers *R*, rencontre en *S* l'ordonnée *EC* prolongée de ce côté-là. Soient de plus l'angle $SBP = SEB$; l'arc *CI* décrit du centre *B* par *C*, & qui rencontre la droite *BP* en *I*; la droite *CM* perpendiculaire en *N* sur *BP*, laquelle *BP* soit aussi rencontrée en *L* par *KL* parallele à *ES*. Soient ensuite *BV*, *CV*, deux rayons osculateurs de la Courbe en question, laquelle Courbe * *DBY* soit touchée au point *B* par la droite *Z*ꝗ éxactement perpendiculaire au prémier *BV* de ces rayons, & qui rencontre le second *VC* prolongé en *F*, l'ordonnée *EC* prolongée en ꝗ, & la droite *CM* en *X*. Enfin après avoir fait la droite *CO* perpendiculaire en *O* sur la tangente *Z*ꝗ, soient aussi les droites *AG*, *BH*, *CT*, perpendiculaires en *G*, *H*, *T*, sur *BE*, *CE*, *LK*, laquelle *LK* rencontre en *K* la seconde *BH* de ces perpendiculaires.

* Pag. 492. in 4.

Cela fait, soit y le nom des ordonnées *BE*, *CE*; dx, celui de leurs perpendiculaires *AG*, *BH*; ds, celui des arcs élémentaires *AB*; *BC*; & r, celui des rayons osculateurs *BV*, *CV*.

II. Tout cela supposé, les angles rectilignes *ABE*, *BPE*, étant externes par rapport aux triangles *EBS*, *BPS*, l'on aura l'angle rectiligne $ABE = BES + BSE$ (*art.* 1.) $= PBS + BSE = BPE$. Donc les angles en *G* & en *H*, étant (*art.* 1.) droits, les triangles rectilignes *ABG* & *BPH* seront semblables entr'eux; & par conséquent (*art.* 1.) les triangles rectilignes *ABG*, *BLK*, le seront aussi: De sorte que si l'on suppose de plus $BK = AG$, ces deux derniers triangles seront non-seulement sembla-

bles,

bles, mais aussi égaux en tout. Donc la corde *AB* ou son arc infiniment petit *AB* (ds) $= BL = BI(ds) + IL$; & par conséquent $IL = -dds$ négative, les ds (*AB*) allant ici en diminuant pendant que les dx (*AG*) vont en augmentant: Ce qui donnera au contraire $HK = ddx$ positive. D'où l'on aura aussi BH (dx). BP (ds) :: HK (ddx). $LP = \frac{dsddx}{dx}$. Donc IP ($IL + LP$) $= -dds + \frac{dsddx}{dx}$ ou $NP = \frac{dsddx - dxdds}{dx}$.

Mais la ressemblance (*art.* 1.) des triangles rectilignes *PNC*, *PHB*, donne *PH* ou *CH* (dy). BH (dx) : : NP $\left(\frac{dsddx - dxdds}{dx}\right)$ $NC = \frac{dsddx - dxdds}{dy}$. De même la ressemblance (*art.* 1.) des triangles rectilignes *BEH*, *MBN*, donne aussi BE (y). BH (dx) : : BM (ds). $MN = \frac{dxds}{y}$. Donc la droite *MC* ($MN + NC$) $\overset{*}{=} \frac{dxds}{y} + \frac{dsddx - dxdds}{dy} = \frac{dydxds + ydsddx - ydxdds}{ydy}$.

* Pag. 493. in 4.

III. Concevons présentement que l'*osculum* ou l'attouchement de la Courbe proposée *DBT* avec son cercle osculateur décrit du centre *V* par *B*, se fasse (en tout ou en partie) sur l'arc infiniment petit *ABC*. En ce cas cet arc *ABC* de la Courbe proposée *DBT*, sera aussi un arc de cercle décrit du centre *V* & du rayon *VB* ou *VC*. Donc suivant la doctrine d'*Euclide*

Prop.

Prop. 32. du Liv. 3. & Prop. 33. du Liv. 6. les angles rectilignes ABZ, $CB\mathcal{Q}$, compris entre la touchante $Z\mathcal{Q}$, & les cordes des arcs partiaux AB, BC, seront entr'eux comme ces arcs. Par conséquent ces arcs, qui (*art.* 1.) ne différent entr'eux que d'une différence infiniment petite par rapport à eux, devant passer pour égaux, les angles rectilignes ABZ, $CB\mathcal{Q}$, doivent passer de même pour égaux ent'reux. Mais l'angle rectiligne ABZ est aussi égal à l'angle $SB\mathcal{Q}$ qui lui est opposé au sommet B. Donc les deux angles rectilignes $CB\mathcal{Q}$, $SB\mathcal{Q}$, sont pareillement égaux entr'eux. Par conséquent encore suivant la doctrine d'*Euclide* Prop. 3. du Liv. 6. $B\mathcal{Q}$ doit diviser la droite CM en X de maniére qu'elle donne $CX . XM :: BC . BM$. en prenant ici BC pour la corde de l'arc BC. Mais l'angle indéfiniment petit CBM, compris entre cette corde & l'autre AB prolongée vers R, rend cette premiére corde BC égale à BM. Donc aussi $CX = XM$, ou $CX = \frac{1}{2} CM$. Mais on vient de trouver (*art.* 2.) $CM = \frac{dx\,dy\,ds + y\,ds\,ddx - y\,dx\,dds}{y\,dy}$. Donc on aura pareillement $CX = \frac{dx.dy\,ds + y\,ds\,ddx - y\,dx\,dds}{2y\,dy}$.

Or si l'on considére que les angles (*art.* 1.) droits BNC, BOC, $\mathcal{Q}BV$, rendant les triangles BNX, COX, & FOC, FBV, semblables entr'eux deux à deux, il en doit résulter $CX . CO :: BX . BN$. Et $CO . CF :: VB . VF$. On verra que les angles (*art.* 1.) infiniment petits NBX, & BVF, rendant aussi $BX = BN$, & $VB = VF$, il en doit résulter $CX = CO = CF$. Donc $CF = \frac{dx\,dy\,ds + y\,ds\,ddx - y\,dx\,dds}{2y\,dy}$.

Mais

Mais en considérant, ainsi que l'on fait ici, l'arc (d'*osculum*) BC comme un véritable arc de cercle dont V est le centre, & BF la tangente en B, perpendiculaire au rayon BV; la doctrine d'*Euclide* (*Prop.* 36. *Liv.* 3.) donne $\overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV}$: De sorte que la supposition de l'angle BVF (*art.* 1.) infiniment petit, donnant aussi $FV = CV = BV$, & l'arc $BC = BF$, ce cas doit donner de même $\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV + CV} = CF \times 2CV = 2CF \times BV$, & conséquemment aussi $BV = \frac{BC \times BC}{2CF}$. * Pag. 494. in 4.

Donc en substituant ici la valeur précédente de CF, avec les noms de ds & de r, donnez à l'arc BC & au rayon BV dans l'art. 1. Cette considération des élémens AB, BC, de la Courbe proposée DBT, comme de véritables arcs de son cercle osculateur ABC, donne enfin $r = \frac{ydyds^2}{dxdyds + ydsddx - ydxdds}$ pour l'expression générale du rayon de ce cercle, ou de la Dévelopée de cette Courbe, sans y rien supposer de constant : & cette expression est précisément la même que la prémiere des infiniment générales que j'ai tirée dans les Mémoires de 1701. pag. 33. † de la considération de cette même Courbe DBT sous la forme de Polygone infiniti-latere, dont les côtez infiniment petits AB, BC, étoient regardez comme de petites lignes droites. *Ce qu'il fallait trouver.*

A u-

† Sec. Edit. pag. 37.

AUTRE SOLUTION.

† IV. Au lieu de BP, LK, CM, CI, CO, CT, soient ET, Et, perpendiculaires sur EB, EC, & qui rencontrent en T, O, t, les cordes BA, CB, prolongées de ce côté-là. Du point O soit OM perpendiculaire en M sur Bt. Soit de plus du centre E par T l'arc TK qui rencontre en K la soûsecante Et, sur laquelle tombe aussi TL perpendiculaire en L.

V. Tout le reste demeurant le même que dans l'art. 1. la construction qui rend (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles BGA, BET, & BHE, TLE, semblables entr'eux, * donnera $BG\ (dy).\ AG\ (dx) :: BE\ (y).\ TE = \frac{ydx}{dy} :: BH\ (dx).\ TL = \frac{dx^2}{dy}$. La même construction rendant aussi (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles SEO, TLO, semblables entr'eux, donnera pareillement SE ou $CE\ (y).\ EO$ ou $ET\ \left(\frac{ydx}{dy}\right) :: TL\ \left(\frac{dx^2}{dy}\right).\ LO$ ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de la soûsecante $ET\ \left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sans y rien supposer de constant, il vient $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cause de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

* Pag. 495. in 4.

† FIG. II.

De sorte que la construction rendant (*art.* 4.) les triangles rectilignes rectangles CHB, CEt, OMt, semblables entr'eux, l'on aura aussi CB (ds). CH (dy) : : Ot $\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$. $OM = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. Ajoûtez à cela que les triangles rectilignes semblables BGA, BET, donnent pareillement BG (dy). BA (ds) : : BE (y). BT ou $BO = \frac{yds}{dy}$. Donc l'angle OBM étant égal à la moitié de l'arc (d'*osculum*) ABC, ou (*art.* 1.) à l'arc entier BC, lequel est aussi égal à l'angle BVC; les triangles rectilignes OMB, FBV, (*hyp.*) rectangles en M, B, donneront enfin OM $\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}\right)$. MB ou BO $\left(\frac{yds}{dy}\right)$: : BF ou BC (ds). BV (r) $= \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$. Et cette expression des rayons osculateurs, resultante de la considération de la courbure des élemens de la Courbe proposée sans y rien supposer de constant, est encore la même que la troisiéme des infiniment générales des Mémoires de 1701. p. 34. † tirées de la considération de ces mêmes élemens regardez comme autant de petites lignes droites ou de côtez infiniment petits du Polygone infiniti-latere rectiligne sous la forme duquel cette Courbe étoit regardée. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

TROI-

† Sec. Edit. pag. 38, 39.

* Pag. 496. in 4.

* TROISIE'ME SOLUTION.

† VI. Soit encore *DBT* une Courbe quelconque dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent en *E*; & dont les arcs *AB*, *BC*, soient encore deux élémens ou infiniment petits du premier genre. Soient de plus *BT*, *Ct*, deux tangentes de ces arcs en leurs extrémitez *B*, *C*, dont la prémiere prolongée rencontre l'autre en *N*, & l'ordonnée *EC* prolongée en *S*. Après avoir fait les droites *ET*, *Et*, perpendiculaires aux ordonnées *BE*, *CE*, & qui rencontrent les tangentes *BT*, *Ct*, en *T*, *O*, *t*; soient les droites *TL*, *OM*, perpendiculaires en *L*, *M*, à *Et*, *Ct*; soient aussi des centres *E*, *N*, les arcs circulaires *TK*, *OP*. Soient enfin les droites *AG*, *BH*, perpendiculaires sur *BE*, *CE*, & qui prolongées rencontrent en *F*, *Q*, les tangentes *BT*, *Ct*.

Cela fait, soit encore *y* le nom des ordonnées *BE*, *CE*; *dx*, celui de leurs perpendiculaires *AG*, *BH*; *ds*, celui des arcs élémentaires *AB*, *BC*; & *r*, celui des rayons osculateurs *BV*, *CV*.

VII. Tout cela supposé, & procédant à peu près comme dans la Solution 2. les triangles rectilignes (*constr.*) semblables *BGF*, *BET*, & *BHE*, *TLE*, donneront *BG* (dy). *FG* ou *AG* (dx) :: *BE* (y). $TE = \frac{ydx}{dy}$ :: *BH* (dx). $TL = \frac{dx^2}{dy}$. Pareillement les triangles rectilignes (*constr.*) semblables *SEO*, *TLO*, donneront aussi *SE* ou *CE* (y). *EO* ou *ET* ($\frac{ydx}{dy}$)

† Fig. III.

$\left(\frac{ydx}{dy}\right)$: : $TL\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. LO ou $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$.
Or en prenant la différence de la soûtangente $ET\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sans y rien supposer de constant, on la trouve être $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$. Donc $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cause de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.
Donc aussi les triangles rectilignes (*constr.*) semblables CHQ, OMT, donneront CQ ou CB (ds). CH (dy) : : * $Ot\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$. * Pag. 497. in 4.
OM ou $OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. De plus les triangles rectilignes (*constr.*) semblables BGF, BET, donnent pareillement BG (dy). BF ou BA (ds) : : BE (y). BT ou $NO = \frac{yds}{dy}$. De plus encore le quadrilatere rectiligne $VBNC$ àiant les angles droits en B, C, l'angle BNC avec l'angle V en doit valoir deux droits de même qu'avec l'angle ONP : Ainsi ce dernier angle ONP doit être égal à l'angle V, & le secteur NOP être semblable au secteur VBC. Donc enfin $OP\left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}\right)$. $ON\left(\frac{yds}{dy}\right)$: : BC (ds). BV (r) $= \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$.
Ce qui est la même expression des rayons osculateurs que celle qui vient d'être trouvée dans la précédente Solution 2.

Voi-

*Voilà de quelle maniére ces expressions infiniment générales se peuvent trouver, sans considérer les Courbes sous aucune forme de Polygones rectilignes. Voici présentement plusieurs autres maniéres de les trouver encore en considérant les Courbes sous cette forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, dont quelques-uns m'ont été inspirées par l'*Analyse des Infiniment petits.

PROBLÊME II.

Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, étant encore donnée, trouver encore une expression générale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant; mais en regardant présentement cette Courbe comme un Polygone infinitilatere rectiligne.

PREMIE'RE SOLUTION.

VIII. † Soit *DBT* la Courbe proposée, dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent toutes au point *E*. Soient de plus *BV*, *CV*, deux de ses rayons osculateurs infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se rencontrent en *V*; soient aussi par leurs extrémitez, *B*, *C*, les tangentes *BT*, *Ct*, faites des petits côtez prolongez *BA*, *CB*, de la * Courbe considérée comme polygone rectiligne infiniti-latere, lesquels se joignent en *B*. Soient *ET*, *Et*, perpendiculaires en *E* aux ordonnées *BE*, *CE*, de cette Courbe, & qui rencontrent en *T*, *t*, les tangentes *BT*, *Ct*, qui leur répondent, & dont *CE* rencontre encore *TB* prolongée en *S*. Du

* Pag. 498. in 4.

† FIG. IV.

Du centre E par les points A, B, T, soient les petits arcs des cercles AG, BH, TK, qui rencontrent BE, CE, Et, en G, H, K. Enfin du centre B par le point O, où BT rencontre Et, soit l'arc OP qui rencontre Ct en P.

IX. Cela fait, les angles droits VCB, ou VCt, & VBT, rendant les angles en B, V, des triangles isoscèles OBP, BVC, égaux entr'eux, ces triangles seront semblables, de même que le sont les triangles SEO, TKO, BGA, BET; & les petits secteurs EBH, ETK. Donc OP. BO ou Ct :: BC. $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$. Et en appellant les ordonnées BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou BH, dx; & AB ou BC, ds; l'on aura pareillement BG (dy). AG (dx) :: BE (y). $ET = \frac{ydx}{dy}$ :: BH (dx). $TK = \frac{dx^2}{dy}$. Et SE ou CE (y). EO ou ET $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ :: TK $\left(\frac{dx^2}{dy}\right)$. $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$. Or si l'on prend la différence de ET $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ sans y rien supposer de constant, il vient $Et - ET$ ou $Kt = \frac{dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$; & partant $OK + Kt$ ou $Ot = \frac{dx^3 + dxdy^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$ (à cause de $dx^2 + dy^2 = ds^2$) $= \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}$.

X. De plus les triangles semblables CHB, Ct, OPt, donnent BC (ds). CH (dy) :: Ct. CE

$CE\ (y) :: Ot\ \left(\frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dy^2}\right)$.
$OP = \frac{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}{dyds}$. D'où résulte aussi $Ct = \frac{yds}{dy}$. Donc en substituant ces valeurs de OP, Ct, avec celle de BC (ds), dans la formule $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$ trouvée ci-dessus art. 9. l'on aura aussi $BV = \frac{yds^3}{dxds^2 + ydyddx - ydxddy}$ pour l'expression générale cherchée * des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbe, laquelle est la même que celle des art. 5. 7. & dans laquelle il n'y a encore rien de constant. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

SECONDE SOLUTION.

XI. Au lieu des tangentes BT, Ct, de leurs soûtangentes ET, Et, & des petits arcs TK, OP, soient du point V les perpendiculaires VM, Vm, sur les ordonnées BE, CE, dont celle-ci CE soit rencontrée en N par VM perpendiculaire sur l'autre BE, de qui la partie MB soit appellée v.

Tout le reste demeurant le même que ci-dessus art. 8. & 9. les triangles semblables BHC, BMV, donneront $BH\ (dx)$. $BC\ (ds) :: MB\ (v)$. $BV = \frac{vds}{dx}$. Donc BV étant constante, sa différence $\frac{dvdxds + vdxdds - vdsddx}{dx^2}$ doit être $= 0$. Donc $v = \frac{dvdxds}{dsddx - dxdds}$. Mais les mêmes triangles

gles semblables BHC, BMV, donnent aussi $BH(dx). CH(dy) :: MB(v). MV$ ou $mV = \frac{vdy}{dx}$. Et à cause des triangles semblables BEH, NVm, l'on aura de même $BE(y). mV\left(\frac{vdy}{dx}\right) :: BH(dx). Nm = \frac{vdy}{y}$. Donc $dy - \frac{vdy}{y} = CH - Nm = dv$, à cause que (*hyp.*) $v = MB = EB - EM$, c'est-à-dire, $dv = \frac{ydy - vdy}{y}$. Donc aussi en substituant cette valeur de dv dans la précédente équation $v = \frac{dvdxds}{dsddx - dxdds}$, l'on aura $yvdsddx - yvdxdds = ydydxds - vdydxds$; ce qui donne $v(MB) = \frac{ydxdyds}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}$. Mais les triangles semblables BHC, BMV, donnent encore $BH(dx). BC(ds) :: MB\left(\frac{ydxdyds}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}\right). BV = \frac{ydyds^2}{ydsddx - ydxdds + dxdyds}$. Ce qui est encore une autre expression générale des rayons des Dévelopées de toutes sortes de Courbes, dans laquelle il n'y a encore rien de * constant, & qui est aussi la même que celle de l'art. 3. ci-dessus. Ce qu'il falloit encore trouver; & ce que l'équation $BV = \frac{vds}{dx}$ trouvée ci-dessus, auroit aussi donné en substituant la derniére valeur de v.

* Pag. 500. in 4.

TROISIE'ME SOLUTION.

XII. Toutes demeurant les mêmes que dans l'art. 11. excepté qu'au lieu de $BM = v$, on suppose ici le rayon osculateur $BV = r$ constant. Les triangles semblables BHC, BMV, donneront $BC\ (ds).\ BH\ (dx) :: BV\ (r).\ BM = \frac{rdx}{ds}$. Et $BC(ds).\ CH\ (dy) :: BV(r).\ MV = \frac{rdy}{ds}$. De qui la différence est $MN = \frac{-rdsddy + rdydds}{ds^2}$ négative à cause que $BE\ (y)$ & $MV\ \left(\frac{rdy}{ds}\right)$ croissent alternativement, & qu'on fait ici dy positif. Donc $BH - MN\ \left(dx - \frac{rdydds + rdsddy}{ds^2}\right).\ BH\ (dx) :: BM\left(\frac{rdx}{ds}\right).\ BE\ (y)$. Ce qui donne $ydxds^2 - rydydds + rydsddy = rdsdx^2$; & par conséquent $r\ (BV) = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$. Ce qui est encore une expression générale du rayon osculateur telle qu'on la demande.

QUATRIE'ME SOLUTION.

XIII. Au lieu des droites VM, Vm, soient du point E les perpendiculaires EF, Ef, sur les rayons osculateurs BV, CV, dont le premier BV soit rencontré en L par Ef perpendiculaire sur le second CV.

Tout le reste demeurant le même que dans l'Art. 11. les triangles semblables BHC, BFE, don-

donneront $BC\,(ds).\,BH\,(dx) :: BE\,(y).\,BF$ ou $BL = \frac{ydx}{ds}$. Et $BC\,(ds).\,CH\,(dy) :: BE\,(y).\,EL = \frac{ydy}{ds}$. De qui la différence est $Lf = \frac{dsdy^2 + ydsddy - ydydds}{ds^2}$. Donc à cause des triangles semblables *BVC, LVf, l'on aura aussi $BC - Lf\left(\frac{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydydds}{ds^2}\right).\,BG\,(ds) :: BL\left(\frac{ydx}{ds}\right).\,BV\,(r) = \frac{ydxds^2}{ds^3 - dsdy^2 - ydsddy + ydydds}$ (à cause de $dx^2 = ds^2 - dy^2$) $= \frac{ydxds^2}{dsdx^2 - ydsdyy + ydydds}$. Ce qui est la même expression générale cherchée que celle de l'art. 12.

*Pag. 501, in 4.

CINQUIE'ME SOLUTION.

†XIV. Soit encore un Courbe quelconque DBT, dont AB, BC, soient deux des côtez infiniment petits en la considérant encore comme polygone infiniti-latere rectiligne, & dont les ordonnées BE, CE, &c. concourent toutes au point E. De ce centre E par les points A, B, L, soient les arcs AG, BH, LO, en prenant aussi BL pour infiniment petite du premier genre. Ensuite après avoir décrit du centre B l'arc AM qui rencontre LO en R, & le petit côté CB prolongé ou la tangente BK en M; soit l'angle KBO égal à l'angle GEB, & dont le côté BO, rencontre cet arc AM en N, & LO en O. Soit de plus AP parallele à BE, & qui rencontre aussi LO en P.

 Soient

† Fig. V.

Soient enfin appellées *AG* ou *BH*, dx; *AB* ou *BC*, ds; & *BE* ou *CE*, y; ce qui donnera aussi *BG* ou $CH = dy$ positive en prenant l'origine de tout cela du côté de *D*.

Cela posé, les triangles (*constr.*) semblables *HEB* & *MBN* donneront $EB(y). BH(dx) :: BM$ ou $BA(ds). MN = \frac{dxds}{y}$. Pareillement les triangles (*constr.*) semblables *OLB*, *ONR*, & *APR*, donneront aussi *OL* ou $AG(dx)$. *BL* ou $BG(dy) :: ON. NR = \frac{ON \times dy}{dx}$. Et *OL* ou $AG(dx)$. *BO* ou $BA(ds) :: AP. AR = \frac{AP \times ds}{dx}$. Donc $AM(MN + NR + RA) = \frac{dxds}{y} + \frac{ON \times dy}{dx} + \frac{AP \times ds}{dx} = \frac{dsdx^2 + ON \cdot ydy + AP \times yds}{ydx}$.

Or si l'on imagine que *AV*, *BV*, soient deux rayons de la Dévelopée de la Courbe *DBT*, la ressemblance des triangles *BVA*, *MBA*, don-

B. 4. nera de plus $AM^{*}\left(\frac{dsdx^2 + ON \times ydy + AP \times yds}{ydx}\right)$. $AB(ds) :: AB(ds). BV = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydy \times ON + yds \times AP}$.

XV. Quant aux valeurs de *ON* & de *AP*, elles se détermineront en supposant $BL = CH$; car alors (les triangles *HCB* & *LBO* se trouvant non seulement semblables, à cause que leurs angles en *H* & en *L* sont supposez droits, & que ceux-ci $EBO + OBK = EBK = ECB + CEB$ (*hyp.*) $= ECB + OBK$, donnant $EBO = ECB$; mais encore égaux en tout à cause qu'on suppose aussi $BL = CH$) l'on aura $ON = BO - BA = CB - BA = dds$, & $AP = BG - BL = BG - CH = -ddy$ négative, à

cause

cause que dy diminue pendant que tout le reste augmente. Donc en substituant ces valeurs de ON & de AP dans la précédente (*art.* 14.) de BV, l'on aura $BV = \frac{ydxds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$ Ce qui est encore une expression générale des rayons osculateurs, dans laquelle il n'y a encore rien de constant, & la même encore que celle des deux Solutions précédentes art. 12. & 13.

REMARQUE.

XVI. Les Memoires de l'Academie de 1701. pag. 30. &c. † fournissent encore une sixiéme Solution de ce Probl. 2. toute aussi générale que les précédentes, ne renfermant (non plus qu'elles) rien de constant. Outre les trois Formules des rayons osculateurs qu'elles & celles du Probl. 1. donnent, ces Memoires de 1701. pag. 38. ‡ en contiennent encore trois autres tirées de celles-là : les voici encore ici pour n'être pas obligé de recourir à ces Memoires dans l'usage qu'on en fait dans ceux-ci pag. 255. 280. & 281.

‡ Pour cela soit dans les Fig. 4. & 5. l'arc de cercle $D☿ = z$, décrit du centre E & du rayon $DE = a$. Cela fait, on aura $E☿ (a)$. $EB (y)$ :: $☿g (dz)$. $BH (du)$. Ce qui donnant $du = \frac{ydz}{a}$, & $ddu = \frac{dydz + yddz}{a}$, il n'y aura qu'à substituer ces valeurs de du & de ddu en leurs places dans les trois Formules des rayons osculateurs trouvées dans les * Solutions précédentes des Probl. 1. & 2. pour avoir les trois autres * Pag. 503. in-4.

Ee 3 sup-

† Sec. Edit. pag. 31. &c. ‡ Sec. Edit. pag. 43.

‡ Fig. IV. V.

supposées ci-dessus pag. 255. 280. 281. Les voici toutes six pour n'être pas obligé de recourir aux Memoires de 1701. qu'on y suppose, & dans l'ordre des Formules des forces centrales où l'on s'en est servi : soient encore ces rayons appellez r.

Formules infiniment générales des Rayons osculateurs.

$$1^\circ.\ r = \frac{y\,dy\,ds^2}{dx\,dy\,ds + y\,ds\,ddx - y\,dx\,dds}.$$

$$2^\circ.\ r = \frac{y\,dx\,ds^2}{ds\,dx^2 + y\,dy\,dds - y\,ds\,ddy}.$$

$$3^\circ.\ r = \frac{y\,ds^3}{dx\,ds^2 + y\,dy\,ddx - y\,dx\,ddy}.$$

$$4^\circ.\ r = \frac{a\,dy\,ds^2}{2\,dz\,dy\,ds + y\,ds\,ddz - y\,dz\,dds}.$$

$$5^\circ.\ r = \frac{ay\,dz\,ds^2}{y\,ds\,dz^2 + aa\,dy\,dds - aa\,ds\,ddy}.$$

$$6^\circ.\ r = \frac{a\,ds^3}{dz\,ds^2 + dx\,dy^2 + y\,dy\,ddz - y\,dz\,ddy}.$$

Voilà ce que donnent les précédentes Solutions analytiques des Probl. 1. & 2. en voici présentement une autre purement géométrique, laquelle supposant à l'ordinaire les élémens des Courbes & de leurs coordonnées successivement constans, se trouve restrainte à ces conditions comme tout ce que j'ai vû jusqu'ici d'autres Solutions de pareils Problêmes, lesquelles n'ont d'universalité qu'autant qu'elles fournissent de formules générales pour chacune de ces hypothéses, & non aucune qui convienne à toutes à la fois, comme font les formules précédentes, les-

lesquelles on voit pourtant avoir été assez faciles à trouver ; mais on ne pense pas à tout.

* PROBLEME III.

* Pag. 504. in 4.

† *Soit encore une Courbe quelconque* DBY, *dont* AE, BE, CE, *soient trois ordonnées infiniment proches les unes des autres, lesquelles concourent avec toutes les autres au point* E, *duquel point (comme centre) soient décrits les arcs circulaires* AG, BH; *soient aussi* BV, CV, *deux des rayons de sa Dévelopée. De plus après avoir prolongé en* R *le petit côté* AB *de cette Courbe considerée sous la forme de polygone infiniti-latere rectiligne, ensorte que* BR *en soit une touchante en* B, *soit fait l'angle* RBP *égal à l'angle* BEA; *&* *du point* B *(comme centre) l'arc* CON *qui rencontre la Courbe en* C, *sa tangente en* N, *&* *la droite* BP *en* O, *laquelle est aussi rencontrée en* P *par* EC *prolongée. Soient enfin faites* OQ *&* CM *paralleles à* BH, *avec* OK *&* ML *paralleles aussi à* PH. *On demande présentement de trouver par la seule Géométrie l'expression générale des rayons osculateurs* BV, CV, *&c. dans chacune des hypothèses des élémens* BC, BH, CH, *successivement constans.*

SOLUTION.

XVII. Puisque *ABR* est (*hyp.*) une ligne droite, l'on aura l'angle $EBR = EAB + BEA = EAB + RBP$; & par conséquent l'angle $EBP = EAB$. Donc en retranchant de part & d'autre les angles droits *EAG*, *EBH*, il

† FIG. VI.

il restera l'angle $GAB = HBP$. Ainsi les angles en G, H, K, L, étant (*hyp.*) droits, aussi-bien que les angles COM ou COP, & KOQ; les triangles AGB, BHP, BKO, BLM, COP, CQO, & MOC, seront tous semblables entr'eux. Cela posé,

1°. Si l'on suppose BC constante, c'est-à-dire $BC = AB$, les triangles semblables BKO, CQO, donneront $OK (CH). BO (BC) :: OQ (HK). CO = \frac{BC \times HK}{CH}$. Et $BK (BH). BO (BC) :: CQ. CO = \frac{BC \times CQ}{BH}$.

2°. Si l'on suppose BH constante, c'est-à-dire $BH = AG$, la ressemblance des triangles BHP, COP, donnera de *même $BP (BC). BH :: CP. CO = \frac{BH \times CP}{BC}$. Et $HP (HC). BH :: OP. CO = \frac{BH \times OP}{HC}$.

* Pag. 505. in 4.

3°. Enfin si l'on suppose CH constante, c'est-à-dire $CH = BG$, la ressemblance des triangles BLM, MOC, donnera aussi de même $BM (BC). ML (CH) :: MC (LH). CO = \frac{CH \times LH}{BC}$. Et $BL (BH). ML (CH) :: MO. CO = \frac{CH \times MO}{BH}$.

XVIII. Donc les triangles (*constr.*) semblables CVB & CBN, AEG & NBO, donnant $BV. BC :: BC. CN = \frac{BC \times BC}{BV}$. Et $AE. AG (BH) :: BN (BC). NO = \frac{BC \times BH}{AE}$. Et par con-

sé-

séquent aussi $CO(CN-NO) = \frac{BC\times BC}{BV} - \frac{BC\times BH}{AE}$ $= \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$. Si l'on égale successivement cette derniére valeur de CO à chacune des six qu'on lui vient de trouver dans l'art. 17. l'on aura

Dans l'hypothêse de BC *constante*,

1°. $\frac{BC\times HK}{CH} = \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV = \frac{AE\times BC\times CH}{AE\times HK + BH\times CH}$.

2°. $\frac{BC\times CQ}{BH} = \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV = \frac{AE\times BC\times BH}{AE\times CQ + BH\times BH}$.

Dans l'hypothêse de BH *constante*.

3°. $\frac{BH\times CP}{BC} = \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV = \frac{AE\times BC\times BC\times BC}{AE\times BH\times CP + BH\times BC\times BC}$.

4°. $\frac{BH\times OP}{HC} = \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

d'où résulte $BV = \frac{AE\times BC\times BC\times HC}{AE\times BH\times OP + BH\times BC\times HC}$.

* *Dans l'hypothêse de* CH *constante*. * Pag. 506. In 4.

5°. $\frac{CH\times LH}{BC} = \frac{AE\times BC\times BC - BC\times BH\times BV}{AE\times BV}$,

 d'où

d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times CH \times LH + BH \times BC \times BC}$.

6°. $\frac{CH \times MO}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$;

d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BH}{AE \times CH \times MO + BC \times BH \times BH}$.

Telles sont les expressions purement géométriques des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes dans les trois hypothêses précédentes; & *c'est tout ce qu'il falloit ici trouver.*

COROLLAIRE.

XIX. Voilà en général pour les Courbes dont les ordonnées partent d'un même point *E*; & par conséquent en regardant ce point comme infiniment éloigné, c'est-à-dire, *AE* comme infinie, ainsi qu'elle le doit devenir dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles, l'art. 18. donnera pour ce cas,

1°. (*nomb.* 1.) $BV = \frac{BC \times CH}{HK}$, & (*nomb.* 2.) $BV = \frac{BC \times BH}{CQ}$, en supposant *BC* constante.

2°. (*nomb.* 3.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{BH \times CP}$, & (*nomb.* 4.) $BV = \frac{BC \times BC \times HC}{BH \times OP}$, en supposant *BH* constante.

3°. (*nomb.* 5.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{CH \times LH}$, & (*nomb.

Fig. 2.

Fig. 5

Fig. 3.

Fig. 4.

d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times CH \times LH + BH \times BC \times BC}$.

6°. $\frac{CH \times MO}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$,
d'où résulte $BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BH}{AE \times CH \times MO + BC \times BH \times BH}$.

Telles sont les expressions purement géométriques des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes dans les trois hypothêses précédentes; & *c'est tout ce qu'il falloit ici trouver.*

COROLLAIRE.

XIX. Voilà en général pour les Courbes dont les ordonnées partent d'un même point *E*; & par conséquent en regardant ce point comme infiniment éloigné, c'est-à-dire, *AE* comme infinie, ainsi qu'elle le doit devenir dans le cas des ordonnées paralleles entr'elles, l'art. 18. donnera pour ce cas,

1°. (*nomb.* 1.) $BV = \frac{BC \times CH}{HK}$, & (*nomb.* 2.) $BV = \frac{BC \times BH}{CQ}$, en supposant *BC* constante.

2°. (*nomb.* 3.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{BH \times CP}$, & (*nomb.* 4.) $BV = \frac{BC \times BC \times HC}{BH \times OP}$, en supposant *BH* constante.

3°. (*nomb.* 5.) $BV = \frac{BC \times BC \times BC}{CH \times LH}$, &

(*nomb.*

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 5

Fig. 4.

(*nomb*.6.) $BV = \frac{BC \times BC \times BH}{CH \times MO}$, en suppoſant CH conſtante.

SCHOLIE.

XX. Ces ſix dernières formules pourroient encore ſe trouver ſeules par la même ſyntheſe que les ſix générales de l'art. 18. d'où elles ſe déduiſent. Et ſi l'on vouloit avoir le tout en termes analytiques, il n'y auroit qu'à appeller BV, r; AE ou BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou* BH, dx; & AB ou BC, ds: Ce qui en prenant l'origine de tout cela du côté de D, donneroit $QC = -ddy$, $HK = ddx$, dans le cas de BC (ds) conſtante; $CP = -ddy$, $OP = -dds$, dans le cas de BH (dx) conſtante; & $LH = ddx$, $MO = dds$, dans le cas de CH (dy) conſtante: Et la ſubſtitution de tous ces noms dans les formules des art. 18. & 19. les rendroit toutes en termes analytiques, & les mêmes qu'elles réſulteroient des infiniment générales trouvées dans les Solutions des Prob. 1. & 2. ci-deſſus, en y ſuppoſant ſucceſſivement ds, dx, dy, conſtantes, & de plus enſuite y infinie pour le cas des ordonnées paralleles entr'elles. Tout cela eſt préſentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

Au reſte je crois devoir avertir que la Démonſtration de l'art. 6. pag. 393. des Mem. de 1704† *eſt de M.* (Jean) Bernoulli.

* Pag. 507. in 4.

† Sec. Edit. pag. 403.

ANALYSE CHIMIQUE DE L'EPONGE DE LA MOYENNE ESPECE.

Par M. GEOFFROY.

L'ANALYSE que M^rs. de la Societé Roiale de *Montpellier* ont faite des Plantes nommées *Lithophyton*, dont ils ont tiré une quantité assez considérable de sel volatil urineux, m'a fait soupçonner que cette espece de Plante marine ne seroit peut-être pas la seule qui fourniroit du sel volatil urineux. Dans cette pensée j'ai entrepris de travailler sur l'Eponge, qui est la Plante marine que j'ai trouvée le plutôt sous ma main.

Cette Eponge brulée à la chandelle ou sur les charbons sent la corne ou les cheveux brulez.

Une livre d'Eponge prise dans un tems humide, après avoir été sechée dans une étuve & separée autant qu'il * est possible du sable & de la terre qu'elle contenoit, s'est trouvée réduite à onze onces. Ces onze onces de matiére ont été distillées à feu gradué. On a séparé toutes les substances qui sont venues par la distillation, & on a rectifié le sel & l'esprit; après quoi il s'est trouvé une once quatre gros & demi de phlegme roussâtre, ou d'esprit fort foible qui avoit un peu d'odeur & de saveur, une once &

* 22. Decembre 1706.

& demi d'esprit volatil urineux, une once quatre gros & demi de sel volatil urineux, une demi-once d'huile fetide épaisse, demi-once de sel fixe, qui contenoit outre l'alcali lixiviel un peu de sel marin, & cinq onces de tête-morte, dans laquelle aiant passé le coûteau aimanté, il s'est rencontré quelques parcelles de fer.

Le poids de ces matiéres rassemblé fait en tout dix onces cinq gros; par conséquent il y a eu trois gros de perte, tant par la dissipation des esprits, que parceque les vaisseaux retiennent toujours quelque peu des matiéres.

Par cette Analyse comparée avec celle que M. *Tournefort* a faite de la Soye rapportée dans les Memoires de 1700, pag. 91. † l'Eponge donne presqu'autant de sel volatil que la Soye, qui est de toutes les matiéres tirées des animaux celle qui en donne le plus. Car quinze onces de Soye ont donné deux onces deux gros de sel volatil concret, & onze onces d'Eponge en ont produit une once quatre gros & demi, ce qui ne fait environ que quatre grains de différence pour once, ce qui est peu de chose.

Il est fait mention dans la Pharmacopée de *Bathe* de ce sel volatil d'Eponge, sans marquer cependant que cette Plante en fournisse une si grande quantité. L'Auteur de ce Livre recommande fort l'esprit & le sel volatil d'Eponge pour la gravelle, les tumeurs scrophuleuses & les goetres, & son sel fixe comme un excellent antinephretique.

† Sec. Edit. pag. 97.

* Pag. 59. in 4.

*OBSERVATION ANATOMIQUE.

Par M. GEOFFROY.

† UN homme après avoir été attaqué pendant deux ans d'accès de phrenesie très-violens, mourut d'un abcès au foye.

On trouva à l'ouverture de son corps outre l'abcès du foye qui étoit assez considérable pour contenir les deux points, trente-trois petites pierres dans la vesicule du fiel, dont les unes étoient grosses comme des noyaux de nesle, & les autres à peu près comme des grains d'orge, toutes de figure irreguliere, legeres, friables, inflammables, & qui ne parurent que de la bile épaissie & grumelée.

Après avoir levé le crane avec peine à cause de la forte adherence de la dure-mere, on apperçût cette membrane beaucoup plus épaisse & plus ferme qu'elle ne l'est ordinairement.

Cette partie qu'on nomme la faux à cause de sa figure, étoit ossifiée presque dans toute sa longueur; ou plutôt cette membrane paroissoit revêtue presque partout de lames osseuses. On pouvoit en quelques endroits les séparer aisément de la membrane sans la rompre, en d'autres elles y étoient tellement unies qu'on ne pouvoit les détacher sans la détruire, & en quelques-uns on ne distinguoit point du tout la membrane de la substance osseuse. Les lames étoient fort inégales & raboteuses, aiant dans quelques endroits deux à trois lignes d'épaisseur.

L'ex-

† 22. Decembre 1706.

L'extrémité de cette faux offeufe étoit fortement attachée à l'épine ou crête de l'os ethmoïdes, de maniére qu'on ne pût la détacher sans la rompre.

La pie-mere étoit plus épaiffe qu'à l'ordinaire, elle avoit prefque la même fermeté qu'a coûtume d'avoir la dure-*mere dans les autres fujets. On la levoit avec facilité de deffus la fubftance du cerveau, même dans les anfractuofitez, & elle étoit toute parfemée de vaiffeaux fanguins fort engorgez de fang.

* Pag. 510. in 4.

La fubftance du cerveau étoit fort deffechée, & beaucoup plus ferme qu'elle ne l'eft ordinairement. Ses circonvolutions, qui imitent affez bien celles des menus inteftins, y étoient d'autant plus diftinctes que les fillons entre ces circonvolutions étoient devenus larges & profonds par le deffechement du cerveau. Nonobftant ce deffechement on a trouvé dans les ventricules une ferofité affez abondante.

La fubftance du cervelet avoit confervé fa confiftance naturelle.

Cet homme qui avoit paffé fa vie dans des applications continuelles qui demandoient beaucoup de contention d'efprit, avoit fait auffi un fort grand ufage du vin & des liqueurs fpiritueufes; & c'eft à cet ufage outré que l'on peut attribuer la principale caufe de fa maladie, & du defordre qui s'eft trouvé dans la tête & dans le foye.

Le mal que peut faire dans nous l'ufage des liqueurs fpiritueufes eft très-confidérable. Ce malade l'avoit éprouvé pendant fa maladie plufieurs fois dans une circonftance particuliere. Car aiant été obligé de lui donner quelques teintures d'Opium pour calmer des infomnies

fa-

fâcheuses qui accompagnoient ses accès de phrenesie, toutes les fois qu'on lui donnoit les teintures avec l'esprit de vin, non seulement il n'étoit point calmé, mais il tomboit dans des accès encore plus violens, au lieu que les teintures avec l'eau le calmoient & lui donnoient quelques heures de sommeil.

On n'est pas assez persuadé de ce mauvais effet des liqueurs spiritueuses, & même de l'usage immoderé du vin. Prévenu en faveur de ces liqueurs qui flatent très-agréablement le goût, chacun croit prendre des forces & de la vie en les prenant, & on ne s'apperçoit pas qu'elles ne paroissent fortifier qu'en augmentant le ressort des fibres, & *qu'elles l'augmentent quelquefois à un point qu'elles les rendent trop roides & même tout à fait osseuses; qu'elles épaississent tous les sucs du corps, qu'elles les coagulent quelquefois jusqu'à les convertir en pierre; & que c'est par-là que ces liqueurs engendrent la goutte, la gravelle, la pierre, & qu'elles causent des vapeurs, des affections convulsives, des rhumatismes, des apoplexies, & des paralysies. Une seule expérience peut convaincre de cette verité.

* Pag 541. in 4.

Si on verse sur la serosité du sang de l'esprit de vin bien rectifié, cette serosité qui est claire se grumelle aussitôt, & se caille en une masse blanche, qui se durcit peu à peu comme du blanc d'œuf cuit, si on la tient à une legere chaleur de digestion. L'esprit de vin caille la bile de la même maniére. On peut juger delà ce que l'on doit attendre de l'usage immoderé du vin, & encore plus des liqueurs spiritueuses que l'on en tire.

OBSERVATIONS

De l'Eclipse de Lune du 21 Octobre 1706. faites à Marseille *&* *à* Bologne.

Par M. MARALDI.

† NOus avons reçu deux Observations de l'Eclipse de Lune du 21 Octobre dernier, dont nous ne pûmes observer rien de précis à l'Observatoire, à cause que la Lune pendant l'Eclipse étoit dans les nuages, qui ne permettoient pas de voir les taches ni le terme de l'ombre que confusément; de sorte que nous ne pûmes déterminer les phases avec assez d'évidence.

Une de ces Observations a été faite à *Marseille* par le P. *Laval* & par M. *Chazelles* dans l'Observatoire des PP. Jesuites. Voici ce qu'ils en ont écrit.

On n'esperoit pas d'observer cette Eclipse, le Ciel aiant * été fort couvert l'après-midi du 21; mais la pluie aiant cessé sur les six heures du soir, & le vent étant sauté du Sud-Est au Sud-Ouest aux nuages, quoiqu'à la terre il fût toujours Sud-Est, il se fit quelques ouvertures aux nuages qui donnerent lieu d'observer les phases suivantes. Les Lunettes dont on s'est servi sont de trois pieds, ce sont les deux du quart de cercle qui sont excellentes. * Pag. 512. in 4.

A six heures 29′ 30″ la Lune paroissant entre des nuages étoit déja eclipsée d'environ deux doigts;

† 22. Decembre 1706.

doigts; mais on ne pouvoit pas distinguer par quelles taches l'ombre passoit.

A 6h 46′ 30″ la mer Caspie éloignée de l'ombre de la distance de son grand diamétre.

A 7h 47′ 30″ la Lune paroissant foiblement à travers des nuages étoit éclipsée de plus de deux tiers; mais on ne distinguoit pas assez l'ombre de la penombre à cause des nuages.

A 8h 2′ 0″ Copernic touche l'ombre & commence à sortir.
4 26 Aristarchus sur le bord de l'ombre.
6 21 Copernicus tout dehors.
7 0 Petavius sur le bord de l'ombre.
9 37 Catharina sur le bord de l'ombre.
13 15 Eratosthene hors de l'ombre.
15 36 Insula sinus medii hors de l'ombre.
18 21 Langrenus sur le bord de l'ombre.
20 0 Heraclides hors de l'ombre.
21 7 Timocaris hors de l'ombre.
21 46 Harpalus hors de l'ombre.
24 21 Helicon sort de l'ombre.

Le Ciel étant serein l'ombre paroissoit bien tranchée lorsqu'on observoit ces taches; mais de foibles nuages aiant de nouveau couvert la Lune empêcherent de bien distinguer les taches pendant un tems considérable, & furent cause que l'ombre & la penombre étoient confondues.

*Pag. 513. in 4. *A 8h 37′ 35″ Langrenus entierement sorti, cette tache a demeuré long-tems sur le bord de l'ombre.

29′ 2″ Possidonius & Teruntius hors de l'ombre.
44 26 La mer Caspie commence à sortir.
47 19 Proclus hors de l'ombre.
50 16 La mer Caspie entierement hors de l'ombre.
52 16 Fin de l'Eclipse à la Lunette.

Le Ciel étoit serein & l'ombre bien tranchée pendant qu'on observoit ces dernieres taches. L'Eclipse a fini entre la mer *Caspie* & *Messala*, mais plus près de *Messala*; l'horloge avoit été reglée par des hauteurs corespondantes du Soleil, & on connoissoit son état par une suite de hauteurs correspondantes prises depuis le commencement du mois de Septembre.

L'autre Observation a été faite à *Bologne* dans l'Observatoire de M. le Comte *Marsigli* par Mrs. *Manfredi* & *Stancari*. Ils observerent cette Eclipse par deux Lunettes de huit pieds, dont une servoit à marquer l'arrivée de l'ombre aux taches de la Lune, l'autre à marquer la grandeur de l'Eclipse en mesurant par un Micrometre la partie de la Lune qui restoit claire & son diamétre apparent.

Ils ne purent pas observer le commencement de l'Eclipse à cause des nuages.

A 7h 36′ la Lune commence de paroître entre les nuages quand sa partie éclipsée étoit déja assez grande.

Voici le détail de ce qu'ils observerent comme nous l'avons reçu.

7h 43′ *Deficiebat paulo plus quàm dimidia.*
7 52 50 *Umbra per Grimaldum, cujus adhuc notabilis pars latet.*

7h.

7h	56'	10''	*Pars illuminata in minutis & secundis circuli maximi.*	11'	30''.
7	56	30	* *Ricciolus totus exit ab umbra.*		
8	2	30	*Pars illuminata* 11' 23'' *: tunc fuit minima obscuratio.*		
8	3	0	*Umbra tangit Fracastorium & transit per Petavium.*		
8	5	10	*Pars illuminata.*	12'	10''.
8	8	30	*Pars Lunæ lucida.*	12	10.
8	9	30	*Galileus exit.*	1	11.
8	11	30	*Pars Lunæ illuminata.*	12	21.
8	16	37		12	55.
8	20	30		13	41.
8	24	20		14	16.
8	25	48	*Aristarchi medium exit.*		
8	28	0	*Pars Lunæ illuminata.*	15	34.
8	29	0	*Umbra per medium Copernici.*		
8	31	0	*Totus Copernicus exit.*		
8	32	30	*Pars Lunæ illuminata.*	16	43.
8	38	0		17	44.
8	42	15	*Heraclides exit.*		
8	44	30	*Pars Lunæ illuminata.*	19	46.
8	46	0	*Harpalus exit.*		
8	47	20	*Dionysius exit.*		
8	48	0	*Pars Lunæ illuminata.*	21	17.
8	49	0	*Manilius exit.*		
8	51	20	*Pars lucida Promontorii acuti exit: pars Lunæ illuminata.*	22	49.
8	52	55	*Menelaus exit.*		
8	53	40	*Plato incipit.*		
8	54	30	*Pars Lunæ illuminata.*	23	25.
8	54	30	*Totus Plato exit.*		
8	56	0	*Langrenus totus exit.*		
8	57	15	*Plinius exit.*		
8	59	2	*Teruntius exit.*		
8	59	20	*Pars Lunæ illuminata.*	25	15.

* Pag. 514. in 4.

9h

9h	1′	55″	*Eudoxi medium emergit.*	
9	2	0	*Pars Lunæ illuminata.*	26′ 43″.
9	2	30	*Aristotelis medium emergit.*	
9*	4	45	*Possidonii medium emergit.*	
9	6	35	*Incipit mare Crisium.*	
9	6	30	*Pars Lunæ illuminatæ.*	28 23.
9	6	40	*Proclus exit.*	
9	10	20	*Medium maris Crisium.*	
9	10	45	*Pars Lunæ illuminatæ.*	30 25.
9	13	25	*Hermes totus emergit.*	
9	14	30	*Totum mare Crisium.*	
9	17	55	*Finis uno tubo.*	
9	18	20	*Finis altero tubo.*	
9	30	0	*Diameter Lunæ fuit.*	33 42.
9	18	20	*Diameter fuit.*	33 50.

* Pag. 515. in 4.

REFLEXIONS.

La fin de l'Eclipse fut observée à *Marseille* à 8h 52′ 16″. Si on ôte de cette Observation 12 minutes pour la différence des meridiens, on aura la fin de l'Eclipse à *Paris* à 8h 40′ 16″ à peu de secondes près de celle qui est marquée dans la *Connoissance des Tems*.

La fin de l'Eclipse à *Bologne* a été observée par une Lunette à 9h 17′ 55″, & par l'autre à 9h 18′ 20″. Aiant supposé la différence des meridiens de 36′ comme on l'a déterminée, on aura la fin de l'Eclipse à *Paris* à 8h 41′ 25″, & à 8h 45′ 50″ par l'autre; ce qui est à une demie minute près de celle qui est marquée dans la *Connoissance des Tems*.

La plus grande phase de l'Eclipse observée arriva à 8h 2′ 30″, quand la partie claire de la Lune étoit de 11′ 23″; & une demie-heure après le diamétre apparent de la Lune fut obser-

vé de 23′ 42″, qui devoit être plus grand de quelques secondes qu'au tems de cette phase. Negligeant cette petite différence qui ne peut pas être sensible dans la détermination des doits éclipsez, la partie éclairée de la Lune étoit de 4 doits 3′ de doit, & par conséquent la partie éclipsée étoit alors de 8 doits moins 3 minutes de doit. Cette grandeur de l'Eclipse s'accorde assez * bien à celle qui fût estimée à *Marseille* vers la même heure. La plus grande phase observée à *Bologne* a été 4 minutes après le milieu déterminé par la *Connoissance des Tems*. Par les Observations de *Bologne* la grandeur de l'Eclipse a été d'un demi doit plus grande que par la *Connoissance des Tems*, & par l'Observation de *Marseille* un peu plus d'un demi doit.

* Pag. 516. in 4.

Fin des Memoires de l'Année 1706.

ERRATA.

Pour les Memoires de 1704.

Page 4. *ligne* 10. érant, *lisez* étant.

Page 12. *ligne* 24. titer, *lisez* tirer.

Page 48. *ligne* 6. $= y + \frac{aby + abz}{azy + bzy}$ *lisez* $= z + \frac{aby + abz}{azy + bzy}$.

Pag. 49. *lig.* 17. par, *lisez* pour.

Pag. 51. *lig.* 19. $\frac{a + b}{2ab}$, *lisez* $\frac{2ab}{a + b}$.

Fau-

Fautes à corriger dans l'Histoire de 1705.

Pag. 110. *ligne* 4. *effacez deux fois* d'une unité.

Fautes à corriger dans les Memoires de 1705.

P*Age* 337. *ligne* 19. ordinairement, *lisez* évidemment.

Pag. 341. *lig.* 4. du côté *C. lis.* du côté du point *C.*

Pag. 343. *lig.* 8. $\frac{a^4bb+2aab^4+b^6}{a^4-2aab+b^4}$, *lis.* $\frac{a^4bb+2aab^4+b^6}{a^4-2aabb+b^4}$.

ADDITION

Aux Memoires de 1706. *pag* 45. *à la fin de l'Article XIX.*

Il est neanmoins à remarquer que lorsque l'on trouve différentes valeur de x & de y dans l'une ou l'autre supposition de $dy = o$, ou $= \infty$, il est nécessaire de chercher le rapport de dx à dy aux points des Courbes que ces valeurs déterminent, car dans ce cas il arrive quelquefois que l'une de ces suppositions donne des *Maxima* ou *Minima* de toutes les deux coordonnées x & y que l'on ne peut distinguer que par la connoissance du rapport de dx à dy.




WIDENER LIBRARY
HX ISQ2

